EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

BEWIJZEN EN REDENEREN

februari
2006/nr.4
jaargang 81

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Houtsnip 22, 7827 KG Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto´s en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19 , 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 46,50
Studentleden: € 26,50
Gepensioneerden: € 31,50
Leden van de VVWL: € 31,50
Lidmaatschap zonder Euclides: € 31,50
Bijdrage WwF: € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 50,00
Instituten en scholen: € 130,00
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

4

februari 2006 JAARGANG 81

VOORWOORD BIJ DEZE SPECIAL

[Marja Bos]

Thema: bewijzen en redeneren

Ondertussen is het een traditie aan het worden: jaarlijks wordt Euclides nummer 4 geheel gewijd aan één thema. En aangezien hiertegen nog geen massaal protest van lezers binnengekomen is, besloot de redactie om deze traditie nog een jaartje voort te zetten. Geen bericht is goed bericht, nietwaar. (Hoewel, met tradities moet je juist durven breken! Misschien daarom volgend jaar een themaloos nummer 4?!)

Voor deze jaargang viel onze keus op het thema 'bewijzen en redeneren', uiteraard binnen de context van het wiskundeonderwijs. Bewijzen en redeneren wordt door velen gezien als hart en ziel van de wiskunde en daarmee als onontbeerlijk element van wiskundeonderwijs. Bovendien zou leren redeneren, leren argumenteren, goed zijn voor de algemene ontwikkeling en maatschappelijke vorming van kritische burgers. Anderen bestrijden dat, en zien '(wiskundig) leren redeneren en bewijzen' als een enigszins elitair en pretentieus leerdoel. Kortom, genoeg stof voor discussie, en daarmee leek het ons een zeer geschikt onderwerp. Overigens hebben we geen inzendingen ontvangen van auteurs die zeer uitgesproken de tweede mening aanhangen – maar wie weet strómen die straks bij ons binnen, naar aanleiding van deze special?!

Van te voren waren we binnen de redactie trouwens enigszins beducht voor een overduidelijke valkuil: vóórdat je het weet gaat het in een nummer met een dergelijk thema alleen over de meer formele aspecten van bewijzen en redeneren. We hebben daarom van meet af aan geprobeerd een brede invalshoek te kiezen. Aan de lezer de beoordeling of ons dat gelukt is. Aan de kwantiteit zal het niet liggen bij dit meer dan dubbeldikke nummer, maar uiteraard gaat het ons om de kwaliteit, de inhoud!

Leeswijzer

Jan Hogendijk maakt op pag. 171 reclame voor ons blad en verleidt u meteen tot het lezen van de 'Elementen', het grote werk van de Griekse wiskundige Euclides.

Bram van Asch laat zien waarom hij bewijzen een zinvolle activiteit vindt voor leerlingen. Ook Dirk van Dalen bepleit meer aandacht voor het leren bewijzen.

Michael de Villiers (Universiteit van KwaZulu-Natal, Durban, Zuid-Afrika) beschrijft verschillende functies van een (meetkundig) bewijs, en laat zien hoe deze functies een zinvolle bijdrage kunnen leveren aan het leren bewijzen op school.

Harrie de Swart laat zijn licht schijnen over correct redeneren, al dan niet binnen de wiskunde. Hij betoogt dat een precieze aanpak, met nauwkeurige definities en bewijzen, z'n vruchten afwerpt, juist ook bij wiskundig minder sterke studenten.

Wim Kleijne inventariseert rol en plaats van redeneren en bewijzen in de diverse wiskundeleerplannen van de afgelopen 100 jaar.

In twee artikelen wordt het thema specifiek belicht met het oog op het vmbo. Anne van Streun richt zich daarbij op de ontwikkeling van denkmethoden door vmbo-leerlingen, met inzet van werkschema's om hun probleemaanpak te helpen structureren. Sieb Kemme beschrijft hoe leerlingen kunnen leren hun beweringen te voorzien van een deugdelijke onderbouwing, via de opdracht 'Laat zien dat…'

Leren bewijzen gebeurt op dit moment vooral bij wiskunde B12 in het vwo, aan de hand van de vlakke meetkunde. Dick Klingens gebruikt die leerstof voor een aantal mooie meetkundige bewijzen naar aanleiding van vier lijnen en een rakende parabool.

Menno van Steenis vindt kijken en zien fundamenteel voor meetkundig begrip. Hij breekt een lans voor synthese, voor een zoektocht naar samenhang, vaak te vinden in een tekening, onder het motto: 'Samenhangen zien doet samenhangen zien.'

Iris van Gulik-Gulikers vertelt over de manier waarop de geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde leerlingen kan ondersteunen bij het leren bewijzen binnen een axiomatisch systeem.

Jan van de Craats is niet erg enthousiast over de lokaal-deductieve aanpak van de vlakke meetkunde in het vwo-B12-programma; hij bepleit het gebruik van coördinaten.

Ook in leerjaar 1 havo/vwo is het mogelijk leerlingen te laten kennismaken met formeel redeneren. Frits Beukers geeft daartoe een aanzet met een voorbeeld aan de hand van de rekenregels voor de negatieve getallen.

Ronald Meester geeft een paar verrassende toepassingen van statistisch redeneren met de regel van Bayes, zoals het bewijs in een moordzaak op grond van het DNA-profiel van de dader.

Henk Barendregt en Freek Wiedijk beschrijven hoe de computer ingezet kan worden bij het leveren en verifiëren van extreem lange bewijzen. Misschien niet zo romantisch – maar wel heel cool!

En dan zijn er natuurlijk nog boekbesprekingen, verslagen, aankondigingen, mededelingen, …, en onze vaste rubrieken, waaronder de laatste aflevering van de serie columns die Bert Zwaneveld schreef onder de titel 'Innovatie en consolidatie'.

Tot slot wil ik u graag wijzen op de bijdrage van NVvW-bestuurslid Swier Garst, die op pag. 232 een overzicht geeft van de stand van zaken met betrekking tot de nieuwe examenprogramma's havo/vwo.

Veel leesplezier gewenst!

INHOUD

Foto voorpagina: TrudiSigned, Krimpen aan den IJssel

Aan dit nummer werkten verder mee: Peter Boelens, Jan Meerhof, Jan Smit en Sam de Zoete.

BEWIJZEN:
VOOR ALLE ZEKERHEID!

[Bram van Asch]

Inleiding

Wiskundigen vinden dat bewijzen een essentieel onderdeel van het vak Wiskunde is. In het wiskundeonderwijs heeft dit facet ook lange tijd een rol gespeeld, maar nu lijkt het uit de wiskunde van het voortgezet onderwijs vrijwel geheel verdwenen. Het wordt door leerlingen moeilijk gevonden, ze zien er vaak het nut niet van in, en mogelijk past het ook wat minder bij heersende ideeën dat het wiskundeonderwijs zich bezig moet houden met realistische, contextrijke problemen. Ook komt de notie van bewijzen in geen enkel ander schoolvak voor. En toch is het begrip 'bewijzen' beslist niet exclusief voor de wiskundige wereld gereserveerd. Een rechter zal pas tot veroordeling overgaan als hij de beschikking heeft over voldoende deugdelijk bewijsmateriaal voor de schuld van de verdachte. Een bedrijf maakt op een gegeven moment reclame met het feit dat door onderzoek bewezen is dat het product werkt. En ook in een zeer ver van de exacte wetenschappen verwijderde discipline als theologie komen bewijzen voor. Thomas van Aquino (1224 - 1274) leverde een aantal Godsbewijzen. De volgende, het Godsbewijs *ex motu* (uit beweging), is het eerste van vijf godsbewijzen en is te fraai (zij het niet vanuit wiskundig oogpunt) om niet te vermelden:

- Er is verandering in de wereld.
- Alles wat beweegt moet door iets anders bewogen worden.
- Dit wordt door weer iets anders bewogen, enzovoorts.
- Er is een Eerste Onbewogen Beweger.

In het vervolg wil ik aan de hand van een aantal voorbeelden laten zien dat het zinvol is in de wiskunde (en het wiskundeonderwijs) met bewijzen bezig te zijn.

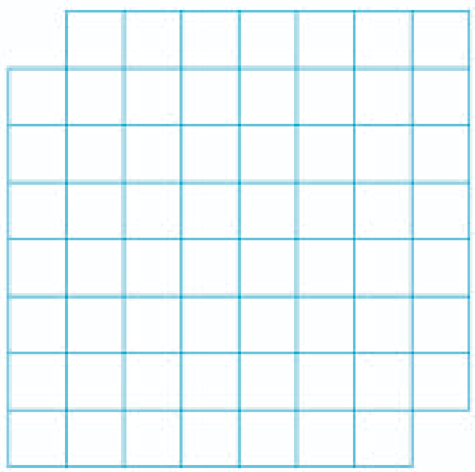
Een bewijs kan een zoekproces stoppen

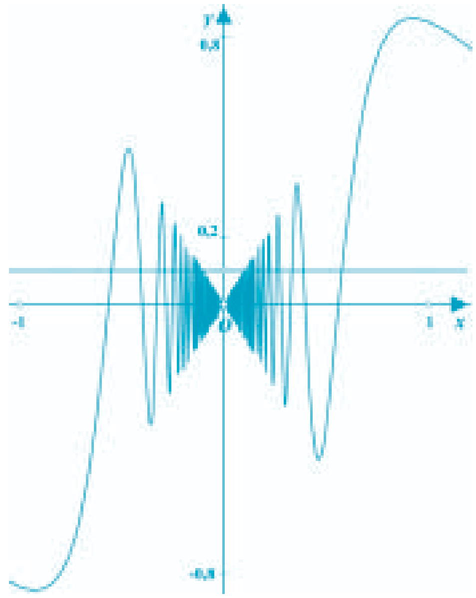
De volgende puzzel heb ik diverse malen aan groepen studenten voorgelegd.

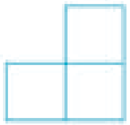
Je hebt een 8×8 bord, waarvan je twee diametraal tegenover elkaar gelegen vakjes hebt verwijderd (zie figuur 1). *Vervolgens heb je 31 domino's, elk ter grootte van twee vakjes van het bord. Probeer het bord hiermee te bedekken.*

De reacties waren vrijwel altijd interessant. Aanvankelijk wat lacherig: Wat een eenvoudige opgave! Toen dit toch wat minder eenvoudig bleek te zijn dan men wel dacht, waren er die gingen twijfelen, terwijl anderen fanatiek doorgingen, en de oplossing bijna meenden te hebben. Uiteindelijk kwam er een bewijs over het wel of niet kunnen, en daarna was het probleem opgelost, iedereen was overtuigd (kan het wel of niet?), er hoefde niet verder gezocht te worden. Daarbij kan ook nog opgemerkt worden dat dit experiment duidelijk liet zien dat bewijzen heel leuk kan zijn als je zelf actief bij het proces betrokken bent.
De volgende opgave komt uit *Getal en Ruimte*, en kan met de grafische rekenmachine worden opgelost.

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$.
Spoor de oplossingen op van de vergelijking $f(x) = 0$.







FIGUUR 1 **FIGUUR 2** **FIGUUR 3**

Het is niet zo moeilijk om met behulp van bijvoorbeeld een grafische rekenmachine de vier oplossingen te vinden. Weinig leerlingen zullen beseffen dat impliciet toch van een bewijs sprake zou moeten zijn: hoe weet je zeker dat je echt alle oplossingen gevonden hebt? Gebruik je daarbij de stelling dat een vierdegraads polynoom maximaal 4 nulpunten kan hebben (vermoedelijk niet), of leid je één en ander af uit het dalen/stijgen van de functie? Of kun je iets concluderen uit een ontbinding van het polynoom? In het volgende sommetje zul je zeker een redenering moeten geven:

Bepaal alle oplossingen van de vergelijking

$$x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0{,}1$$

(zie figuur 2 voor de grafieken van de functie

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$ en de lijn $y = 0{,}1$).

Het is ook hier niet moeilijk om met een grafische rekenmachine één of meerdere oplossingen te vinden. Maar hoe kun je zeker weten dat je ze allemaal gevonden hebt (het zijn er erg veel), en dus niet meer verder hoeft te zoeken? Wat is bijvoorbeeld de grootste oplossing, en hoe weet je zeker dat er geen grotere zijn? En uit de 'echte' wiskundewereld zijn er ook tal van bekende voorbeelden te noemen van bewijzen die een einde maakten aan soms eeuwenlange zoektochten. Zo heeft men vele eeuwen lang gezocht naar een constructie om met passer en liniaal een hoek in drieën te delen totdat er onomstotelijk bewezen werd dat dit onmogelijk is. En hetzelfde geldt voor het bestaan van formules om polynoomvergelijkingen van willekeurige graad op te kunnen lossen. Bewezen is al geruime tijd geleden dat dergelijke formules voor vergelijkingen van de graad groter dan 4 niet kunnen bestaan. Toch is er nog niet zo lang geleden veel publiciteit geweest rond een student van Fontys die meende een algemene formule gevonden te hebben. Daaruit bleek eens te meer dat er nog steeds mensen zijn die veel tijd verdoen doordat ze geen kennis van bestaande theorieën hebben en daardoor volharden in hun (zinloze) zoeken.

Met een bewijs kun je iemand overtuigen

De rol die bewijzen in de wereld van wiskundigen spelen is in feite deze: na een correct bewijs behoort elke wiskundige van de juistheid van de stelling overtuigd te zijn. En ook in het eerste voorbeeld in het voorafgaande stukje speelde dit een rol. Een vraag die ik graag aan studenten voorleg is de volgende:

Is het getal 0,999...... *het grootste getal dat kleiner is dan* 1, *of is het gelijk aan* 1*?*

Het overgrote deel kiest altijd voor de eerste optie ('je ziet toch duidelijk dat er iets ontbreekt'), terwijl een kleiner deel beweert dat het echt gelijk is aan 1. Als je dan aan de één vraagt om de ander te overtuigen, krijg je allerlei argumenten te horen, maar zelden steekhoudende. Een bewijs via bijvoorbeeld

de som van een meetkundige rij overtuigt daarna de meesten wel, en voor de twijfelaars is er in deze situatie gelukkig nog een tweede redenering die dan meestal wel afdoende is: noem het getal x, dan zie je gemakkelijk in dat $10x - 9 = x$, enz.
Bewijzen gaan dus een rol spelen als beweringen in twijfel worden getrokken, als er spontaan discussies in de trant van welles-nietes ontstaan. Naar dit soort situaties zouden we in het wiskundeonderwijs op zoek moeten gaan.
In de meetkunde kan dat bijvoorbeeld heel goed met het programma *Cabri*. Al doende krijg je vermoedens, met daarna de vraag of het echt altijd zo is. Een voorbeeld:

Bekijk een vierhoek waarin de diagonalen loodrecht op elkaar staan. Verbind de middens van de zijden zodat je een nieuwe vierhoek krijgt. Meet de hoeken van deze vierhoek. Is wat je daarbij opmerkt nu altijd zo?

Een voorbeeld van een wat andere aard:

Schrijf een aantal voorbeelden op van rechthoekige driehoeken waarvan de zijden geheeltallige lengte hebben, bijvoorbeeld 3, 4, 5 *of* 5, 12, 13 *of* 8, 15, 17 *(zogenoemde Pythagoreïsche drietallen). Je ziet dat in deze voorbeelden minstens één zijde een lengte heeft die door* 5 *deelbaar is. Is dat nu altijd zo?*

Het volgende is een variatie op een opgave uit het blad Pythagoras[1].

Het getal 10 *is deelbaar door* 2*, het getal* 111 *door* 3*,* 100 *door* 4*,* 10 *door* 5*,* 1110 *door* 6*, enz. Is er nu voor elk natuurlijk getal n een getal dat geheel bestaat uit enen en nullen, en dat deelbaar is door n?*

Het lijkt er in het begin wel op, maar is dat nu altijd zo? Proberen geeft steeds meer aanwijzingen dat het wel waar zal zijn, maar je weet maar nooit!
Ga je op een dergelijke manier met het begrip *bewijzen* om, dan is interactie tussen leerlingen onderling en tussen leerlingen en docent uiteraard heel belangrijk. In het huidige vrij algemeen toegepaste stramien waarbij leerlingen individueel aan de hand van studiewijzers door de leerstof moeten worstelen, werkt dit natuurlijk niet.

Een bewijs kan een bruikbare methode leveren om een probleem op te lossen

Een bekend voorbeeld van een zogenoemd constructief bewijs is één van de bewijzen dat elk tweetal positieve gehele getallen een grootste gemene deler heeft, namelijk het bewijs dat gebruik maakt van het Euclidische algoritme. Er wordt daarbij steeds deling met rest toegepast, waarbij de rest steeds kleiner wordt, net zo lang tot de rest gelijk aan 0 is. Je kunt dan beredeneren dat de voorlaatste rest de grootste gemene deler is. Daarmee wordt de existentie van een grootste gemene deler aangetoond, maar wordt ook meteen aangegeven hoe je die zou kunnen uitrekenen. En dit algoritme is niet slechts van belang om eenvoudige rekensommetjes mee te kunnen maken, maar het vormt bijvoorbeeld ook de basis voor diverse veel gebruikte cryptografische systemen.
Ook het laatste voorbeeld van de vorige paragraaf kan hier genoemd worden. Door de resten van de getallen 1, 11, 111, ... bij deling door n te bekijken, en te bedenken dat er hoogstens n verschillende resten kunnen zijn, krijg je niet alleen een bewijs dat de bewering waar is, maar tevens een methode om zo'n bijzonder getal te vinden.

Een ander voorbeeld is een bewijs dat er oneindig veel rechthoekige driehoeken zijn waarvan de zijden geheeltallige lengte hebben en waarvan de lengtes geen gemeenschappelijke factor hebben. Zonder deze laatste beperking zou de bewering flauw zijn: als a, b, c dergelijke zijden zijn, dan voldoen ook na, nb, nc voor elk natuurlijk getal n. Voor lengtes die onderling priem zijn, kan dit als volgt worden aangetoond: neem willekeurige natuurlijke getallen s en t met $s > t$ en $\text{ggd}(s,t) = 1$, één van de twee even en de andere oneven. Noem $a = s^2 - t^2$, $b = 2st$, $c = s^2 + t^2$, dan volgt onmiddellijk dat $a^2 + b^2 = c^2$. Hierbij kan nog worden opgemerkt dat je zelfs kunt bewijzen dat je op deze manier alle dergelijke drietallen a, b, c die onderling priem zijn, kunt krijgen (zie bijvoorbeeld [2]).

Van verschillende spelletjes kun je bewijzen dat er een winnende strategie bestaat. En vaak bestaat het bewijs uit een beschrijving hoe je kunt winnen. Bijvoorbeeld het Nim-spel.

Nim is een spel voor twee spelers dat gespeeld wordt met lucifers. Op tafel worden stapeltjes lucifers neergelegd. Om en om nemen de spelers uit een stapeltje naar keuze een willekeurig aantal lucifers weg (minstens een, maximaal alle lucifers uit die stapel). Winnaar is degene die de laatste lucifer trekt.

Je kunt nu van elke beginsituatie precies aangeven of dit een winnende of verliezende situatie is, en het bewijs daarvan geeft meteen de strategie die je moet volgen. Zie bijvoorbeeld [3], waar je niet alleen uitleg kunt krijgen, maar het spelletje ook interactief kunt spelen.
Een andere aardige puzzel op dit gebied is de volgende.

Neem een bord met 8 *bij* 8 *vakjes. Verwijder één van deze vakjes, en laat zien dat je wat overblijft kunt bedekken met* 21 *tromino's. Een tromino is daarbij een domino met nog een vakje er boven op* (zie figuur 3).

Voor een 2 bij 2 bord is dit triviaal. Voor een 4 bij 4 bord kun je als volgt te werk gaan. Verdeel dit bord in vieren. In één van die kwarten is het vakje verwijderd, en daar lukt het dus. De vakjes van de overige drie kwarten die rond het midden liggen, zijn precies door één tromino te bedekken. En verder hou je dan drie kwarten over met al één vakje bedekt, en dan lukt het ook wel om de rest te bedekken. Daarna kun je dit proces herhalen voor het 8 bij 8 bord. Dit puzzeltje kan

ook nog op een andere manier op een hoger niveau gebruikt worden. De bewering is namelijk waar voor elk 2^n bij 2^n bord, en het bewijs volgt gemakkelijk met volledige inductie, waarvan de inductiestap in de zojuist beschreven strategie in feite al is aangetoond. Je kunt hiermee dus niet alleen de puzzel oplossen, maar ook de kracht illustreren van de bewijsmethode die volledige inductie heet.

Een bewijs kan je helpen een stelling of regel te onthouden, of te reconstrueren

Het is een bekend verschijnsel dat veel leerlingen weinig rekenregels paraat hebben. Nu is de noodzaak daarvoor ook niet zo groot meer omdat vrijwel elke regel die ooit nodig mocht blijken op een formuleblad staat. Maar zodra er met logaritmen, goniometrische functies of wortelvormen gerekend moet worden, zie je heel veel misvattingen, ondanks het formuleblad. In *Getal en Ruimte* staat een bewijs van de volgende regel voor logaritmen: ${}^{g}\log(ab) = {}^{g}\log a + {}^{g}\log b$, en wel als volgt:

$$g^{{}^{g}\log(ab)} = ab$$

$$g^{{}^{g}\log a + {}^{g}\log b} = g^{{}^{g}\log a} g^{{}^{g}\log b} = ab$$

Dus $g^{{}^{g}\log(ab)} = g^{{}^{g}\log a + {}^{g}\log b}$, waaruit de regel volgt.

Ik denk dat dit bewijs vaak wordt overgeslagen, en dat deze regel voor veel leerlingen één van de vele regels is die ze ergens hebben staan. Ik vind dat jammer. Ik denk juist dat het voor leerlingen gemakkelijker is om deze regels te reconstrueren als je wél aandacht schenkt aan de manier waarop ze worden afgeleid (bewezen), en dat de regels dan ook vertrouwder voor hen worden. Naar mijn idee krijgen ze dan ook meer inzicht in de belangrijke eigenschappen van exponentiële en logaritmische functies.

Een ander voorbeeld is de cosinusregel. Onzekerheid over wat waar moet staan, en of er een + of een – voor de term met de cosinus moet staan, kan gemakkelijk verholpen worden door een beeld van een driehoek en het idee voor de afleiding van de cosinusregel daarin paraat te hebben.
Ook enig begrip van het idee achter een bewijs (zonder dat dat bewijs in alle details beheerst wordt) kan nuttig zijn. Zo worden als toepassing van de integraalrekening in wiskunde B voor het vwo formules afgeleid voor de inhoud van omwentelingslichamen, en voor de booglengte van een grafiek. Door te beseffen dat deze formules tevoorschijn komen via inhoudsbepaling van smalle cilindertjes, respectievelijk door gebruik van de stelling van Pythagoras, kun je de formules reconstrueren, zonder dat er een volledig formeel bewijs via Riemann-sommen hoeft te volgen.

Conclusies

Met behulp van het voorafgaande heb ik hopelijk afdoende bewezen(!) dat bewijzen een zinvolle activiteit binnen het wiskundeonderwijs kan zijn. De vaardigheid om argumenten in een logische volgorde achter elkaar te zetten is toepasbaar niet alleen in de wiskunde maar vaak ook daarbuiten. Ook het kunnen beoordelen of redeneringen kloppen of vals zijn lijkt mij uiterst zinvol. Ik denk wel dat het vaardig worden in en het gevoel krijgen voor het geven van bewijzen een proces is. Als je dit belangrijk vindt dan moet je daar zo vroeg mogelijk mee beginnen, en niet zoals nu alleen in Natuur en Techniek (nog) gebeurt op een krampachtige manier met een paar weken meetkunde in 5 en/of 6 vwo. Je moet er daarbij wel voor zorgen dat het bewijs, de redenering, zinvol is. En dus niet zoals in een opgave die ik jaren geleden in een boek voor de brugklas aantrof:

Gegeven een rechte lijn en een lijnstuk. Teken het spiegelbeeld van het lijnstuk ten opzichte van de rechte lijn, en bewijs dat lijnstuk en spiegelbeeld even lang zijn.

Hierop was van vrijwel alle leerlingen de te verwachten reactie: maar dat zie je toch zo! We moeten er natuurlijk wel voor zorgen dat leerlingen niet de indruk krijgen dat bewijzen zoiets is als moeilijk doen over dingen die je toch zo ziet.

Verschillende voorbeelden die ik gaf komen uit de hoek van de discrete wiskunde, in het bijzonder de getaltheorie. Natuurlijke getallen zijn voor de meeste mensen al op zeer jonge leeftijd vertrouwde ingrediënten voor sommetjes en puzzeltjes. Problemen uit die hoek zijn vaak in heel eenvoudige termen te formuleren (wat niet wil zeggen dat eventuele bewijzen ook eenvoudig zijn; denk maar aan de laatste stelling van Fermat), en kunnen toch zeer uitdagend zijn. En voor de meeste leerlingen zijn problemen met gehele getallen wellicht toegankelijker, minder abstract, dan problemen uit de meetkunde. Meer ideeën over het gebruiken van onderwerpen uit de discrete wiskunde in het voortgezet onderwijs kunnen gevonden worden in [4].

Verwijzingen

[1] Pythagoras, jaargang 44, nr. 4 (2005).
[2] Frits Beukers: Getaltheorie voor Beginners. Utrecht: Epsilon Uitgaven (nr. 42, 1999).
[3] www.science.uva.nl/misc/pythagoras/interactief/java/nim/
[4] Ian Anderson, Bram van Asch, Jack van Lint: Discrete Mathematics in the High School Curriculum. Zentralblatt zur Didaktik der Mathematik, Vol. 36 (3), pp. 105–116 (2004).

Over de auteur

Bram van Asch is redacteur van Euclides. Hij werkt als universitair docent aan de Technische Universiteit Eindhoven, en is daar ondermeer betrokken bij de eerstegraads lerarenopleiding.
E-mailadres: a.g.v.asch@tue.nl

DENKMETHODEN EN WERKSCHEMA'S IN HET VMBO

[Anne van Streun]

Wat is redeneren eigenlijk?

De wiskundewereld beroept zich er vanouds op dat leerlingen in wiskundeonderwijs leren redeneren, ook wel logisch denken genoemd. In dit speciale nummer van Euclides wordt dat in een aantal artikelen toegespitst op het leren bewijzen, dat is het redeneren vanuit een gegeven situatie naar een bekend doel (hetgeen te bewijzen is) met behulp van al eerder vastgestelde kennis. Archimedes heeft in zijn boekje 'de Methode' al laten zien dat voor het ontdekken van nog te bewijzen stellingen (bijvoorbeeld de stelling over de oppervlakte van een paraboolsegment) veelal heel andere typen redeneringen nodig zijn. In zijn boekje ging het om het toepassen van een heuristische methode, het denkbeeldig wegen van infinitesimaal dunne lijnstukken of oppervlakken met een balans. Het redeneren met onzekerheid in de statistiek, bijvoorbeeld het trekken van conclusies op basis van de data in een steekproef, vraagt een vorm van formeel, hypothetisch, 'als-dan'-denken waar veel mensen nooit aan toe komen. Het redeneren van een schaker is ook een vorm van 'als-dan'-denken in de concrete spelsituatie. Psychologisch gezien is het redeneren een vorm van denken en probleem oplossen en goed wiskundeonderwijs kan aan de ontwikkeling van dat denken een bijdrage leveren. Dan is het wel zaak om voor de leerlingen de verschillende aspecten van het denken te expliciteren.

Wat houden onze vmbo-leerlingen er van over?

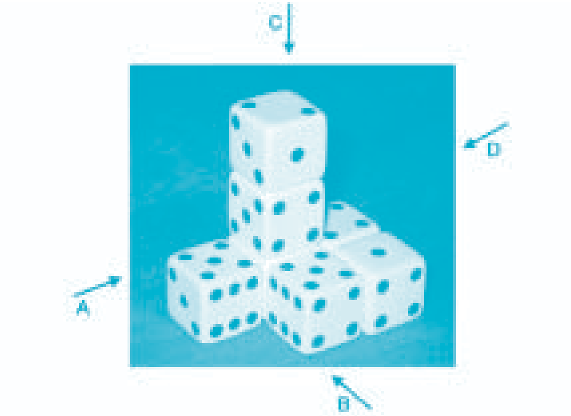
In sombere momenten twijfel je als leraar wel eens aan de waarde van alles wat je onderwijst. Hoe lang beklijft datgene wat je hebt onderwezen? En wat is eigenlijk het belangrijkste wat je in al je jaren in de omgang met leerlingen hebt bereikt? Bekend is natuurlijk dat vmbo-leerlingen grote waarde hechten aan de persoon van de leraar, terwijl vwo-leerlingen meer op de inhoud van de vakken zijn georiënteerd. Een persoonlijke waardering van een leraar blijft de leerlingen soms levenslang bij. Toch blijft de vraag wat onze vmbo-leerlingen van de inhoud van onze wiskundelessen overhouden. Wat is eigenlijk het belangrijkste dat zij daarvan leren, ook al komen ze later in hun opleidingen het vak wiskunde nooit meer tegen? Iedereen heeft op die vraag wel een eigen antwoord. Zelf denk ik dat ons huidige wiskundeonderwijs in het vmbo zeker een positieve bijdrage kan leveren aan de ontwikkeling van het denken, redeneren en probleem aanpakken. Daar gaat dit artikel over.

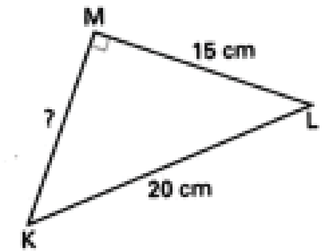
Bij McDonald's

Achter mij zitten bij McDonald's in de Herestraat twee jongens van zo'n achttien jaar. Ze leggen hun geld op tafel en kijken intussen naar het bord met de prijzen. Kunnen ze het betalen of niet? Na vijf minuten overleg verzamelt één van de twee al het geld, bestelt iets en komt terug met twee BigMacs. Ze leggen het overgebleven geld weer op tafel, kijken naar het bord met de prijzen en tellen hun geld. De andere (!) jongen gaat nu met al het geld naar de balie en komt terug met twee grote cola's.
Zo maar een voorval. Voor die jongens is het oorspronkelijke probleem onoplosbaar. Het gezichtsverlies als je met te weinig geld iets bestelt, is te groot. Ze zitten vast, maar willen het probleem wel oplossen. Die *houding* is een voorwaarde voor succes. Ze komen tot een oplossing door het grote probleem op te spitsen in twee deelproblemen. Stap voor stap wordt elk deelprobleem opgelost. Een bekende denkmethode voor het oplossen van problemen, *opsplitsen in deelproblemen*. Je zou willen dat ze dat (ook) in de wiskundelessen hebben geleerd.

Planken kopen

Mijn buurjongen Rinse van zeventien jaar leert voor timmerman en wil wel wat bijverdienen. Het houtwerk van mijn kippenhok is aan één zijkant boven de deur verrot. Rinse meet de afmetingen van de driehoekige punt die moet worden vervangen. De breedte is 3 meter, de hoogte is 1,5 meter en de planken zijn 15 cm breed. Als een echte professional schrijft hij de maten op zijn hand. Samen gaan we naar de plaatselijke timmerman en houtleverancier. Rinse





FIGUUR 1 FIGUUR 2 FIGUUR 3

geeft de maten op aan de jongen in het magazijn, Wietze heet hij. We hebben planken nodig voor een kippenhok, zegt Rinse, van 15 cm breedte en met totale oppervlakte 3 bij 1,5 meter. Ik moet betalen, maar wacht toch maar even af. Wietze fronst zijn wenkbrauwen, tekent op een kladje een rechthoek, zet de maten erbij en zegt: *'Dus 10 planken van 15 cm breedte hoog en elk 3 meter lang, dus 30 meter samen.'* Rinse knikt instemmend maar Wietze twijfelt, tot mijn genoegen. Kennelijk ziet hij het kippenhok nog niet goed voor zich en wil hij de oplossing controleren. *'Hoe ziet die zijkant er dan uit?'*, vraagt hij. Rinse tekent de driehoek en zet 3 meter bij de basis en 1,5 meter bij de hoogte. *'Oh, dus de helft'*, zegt Wietze en gaat aan het werk. We krijgen 8 planken van 2 meter lengte mee en daarmee lukt het (tot mijn verbazing) om die driehoek op te vullen.
We weten dat overal in de wereld mensen bij het begrip oppervlakte automatisch aan lengte keer breedte denken. Ook Rinse rekent daarmee. Wietze heeft kennelijk in de houtopslag al vaker klanten gehad die iets verkeerds wilden bestellen. Zijn denkmethoden zijn helder: tekenen (*visualiseren*) en *controleren*. Leren controleren, als vanzelfsprekende denkmethode, doe je niet door in het antwoordboekje te kijken! Controleren is ook niet in de eerste plaats je hele berekening of redenering nog eens nalopen, maar nagaan of je antwoord of conclusie redelijk is, betekenis heeft, klopt bij de situatie. Nu antwoordboekjes, rekenmachines en grafische rekenmachines zo massaal worden gebruikt, hoort bij een goede didactiek de eis aan leerlingen om hun resultaten zichtbaar te controleren. Wat mij betreft eindigt elke toetsopgave met de vraag: *'Hoe heb je je resultaat gecontroleerd? Laat zien!'*

Redeneren met dobbelstenen

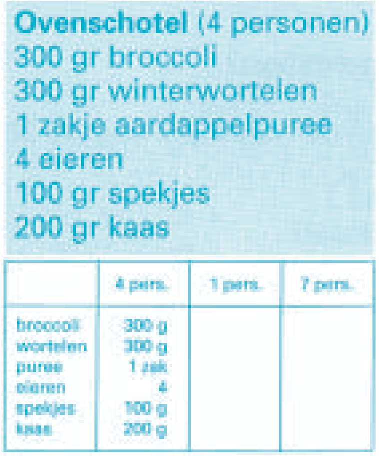
Op de camping in Zuid-Frankrijk heb ik het examen vmbo-GL/TL 2005 nog eens gemaakt en mij afgevraagd of leerlingen ook redeneringen moeten laten zien en welke wiskundige kennis daarbij wordt gebruikt. Om die vraag te kunnen beantwoorden is opgave 12 van het examen heel geschikt. Zie figuur 1.

De lezer wordt uitgenodigd eerst zelf die opgave te beantwoorden en aansluitend mijn vraag te beantwoorden.

DOBBELSTENEN STAPELEN

In figuur 1 zie je een foto van een bouwwerk van zeven dobbelstenen. Bij deze dobbelstenen zijn alle ribben twee centimeter lang. Je kunt dit bouwwerk van verschillende kanten bekijken. Naast de foto zijn vier kijkrichtingen **A**, **B**, **C** en **D** aangegeven.
12 Bij een dobbelsteen is de som van de ogen van twee tegenover elkaar liggende vlakken altijd gelijk aan zeven. Bijvoorbeeld: tegenover de twee ligt de vijf. Bereken het **minimale** aantal ogen dat je kunt krijgen als je alle ogen optelt van het aanzicht vanuit richting **D**.

Na zoveel jaar wiskundesommen te hebben gemaakt ben je niet goed meer in staat om te bedenken hoe een nieuweling een niet routinematig te beantwoorden probleem oplost. (Enige decennia onderzoek naar de probleemaanpak van experts en novices laat duidelijk zien dat experts verkort en onnavolgbaar voor novices een voor hen bekend probleem oplossen.) Het is voor mij dan ook moeilijk om te bedenken welke redenering vmbo-leerlingen bij deze opgave leveren. Daarom heb ik deze opgave voorgelegd aan onze oudste dochter (vwo B, accountancy), onze schoonzoon (bouwkundige, projectleider) en onze oudste kleinzoon Sietze (10 jaar), die in een tent naast onze caravan (Otten, 1981) kampeerden. Zij strandde op de ruimtelijke situatie ('Dat soort opgaven kon ik nooit'), hij overzag het vetgedrukte woord en kwam snel met één specifieke oplossing. Sietze kent mijn voorkeur voor een systematische aanpak omdat hij al enige jaren op zaterdag bij mij in de schuur aan het werk is met timmeren, zagen, verven en maken van dingen. Ik citeer: *'Achter die 3 ligt een 4. Achter die 5 ligt een 2. Dat is samen 6. Op de hoek ligt een 4 en dus erachter een 3. Onder de 1 ligt een 6. Dus 2 of 5. Daarnaast kan een 1, een 2, een 5 of een 6 liggen. Wat is de vraag? Wat betekent minimaal?'*



FIGUUR 4

FIGUUR 5

FIGUUR 6

Het menselijk denken is uiteen te leggen in verschillende denkmethoden. Dit type redenering van Sietze is één van de belangrijkste denkmethoden.
Er is een gegeven situatie en je beredeneert wat daar direct uit volgt (*situatieanalyse*). Je vraagt je vervolgens af waar je naar toe moet en hoe je daar komt (*doelanalyse*). Door een redenering of berekening probeer je vervolgens het verschil te overbruggen tussen wat je al weet en waar je naar toe moet. Meestal heb je daarvoor nog (vak)kennis nodig, maar dat is hier niet het geval. Hier wordt alleen maar het redeneren getoetst, ja zeker, maar is dat wel in die vier jaar onderwezen? De p'-waarde is laag (0,44). En scoren de meisjes hier veel lager dan de jongens?
Heel verrassend kom ik dankzij onze Sietze weer terecht bij de belangrijkste probleemaanpak in de Euclidische meetkunde, zoals die de laatste jaren in wiskunde B12 vwo weer vorm heeft gekregen; zie bijvoorbeeld figuur 2, een illustratie uit Moderne wiskunde vwo B2 deel 1.
En ik zie mijn schoolbord uit het begin van mijn leraarsloopbaan voor 1970 weer voor me met een linkerzijbord waar op stond: *WAT WEET JE?* en op het rechterzijbord *WAAR WIL JE NAAR TOE?* Op het middelste bord, *PLAN,* komt dan het lijstje van mogelijke feiten, stellingen, regels, begrippen (*weten dat*) die mogelijkerwijs kunnen helpen om het verschil tussen het linkerbord en het rechterbord te overbruggen.
Als leerlingen in het vmbo in de wiskundeles zich die structuur van een goede redenering, berekening of probleemaanpak hebben eigen gemaakt, dan hebben ze zeker iets voor het leven na de school geleerd!

Werkschema voor het rekenen met de stelling van Pythagoras

Tientallen jaren onderzoek naar het denken en oplossen van leerlingen en volwassenen op allerlei terrein heeft geleerd dat minder succesvolle oplossers te snel naar een oplossingsmethode grijpen en daardoor vaak op een verkeerd spoor belanden.
We kennen dat allemaal van de aanpak van onze leerlingen en ook wel eens van onszelf. We vergeten het probleem eerst te verkennen, we slaan dan de analyse van de situatie en het doel over, we diepen uit ons geheugen een (onbegrepen) actie op die we op deze nieuwe situatie loslaten. Pólya (*How to solve it*, 1946) betoogde indertijd al dat wiskundeonderwijs bij uitstek geschikt is om leerlingen een goede aanpak van rederenen en berekenen te leren. Je hebt weinig kennis nodig om een goed probleem te kunnen oplossen. De hamvraag voor onderwijs is evenwel hoe je leerlingen een goede aanpak en houding kunt leren en onderwijzen. Indertijd heb ik jarenlang schaakles gegeven aan brugklassers en ook daar doet zich het verschijnsel voor dat jonge spelertjes al een zet hebben gedaan, voordat ze ontdekken dat het een blunder is. Mijn instructie was: 'Ga op je handen zitten.' En het werkte ook nog; enkele seconden meer voorkwamen heel wat blunders.
In onze meer recente edities schoolboeken komen tal van werkschema's voor die leerlingen ertoe brengen eerst het probleem te verkennen. Het bekendste werkschema helpt leerlingen bij de berekeningen op basis van de stelling van Pythagoras. (Zelf heb ik dat schema omstreeks 1975 ontdekt in de boeken van SMP.[1]) Voor generaties leerlingen was de stelling van Pythagoras zoiets als $a^2 + b^2 = c^2$. Als a en b waren gegeven, dan werd c feilloos berekend, maar tot op de eindexamens mavo-lbo ging het massaal mis als bij dezelfde rechte hoek a en c waren gegeven en b moest worden berekend, $a^2 + c^2 = b^2$ (zie figuur 3). Waarom werkt het bekende werkschema wel?

zijde		*kwadraat*
rhz	....	....
rhz	....	....
lz	....	....

Leerlingen die hebben geleerd eerst het kale werkschema op te schrijven en dat in te vullen, worden op die manier verplicht om de gegeven situatie en het doel te analyseren. Vervolgens is het berekenen een mooi voorbeeld van vooruitdenken (vanuit de gegeven situatie) en terugdenken (vanuit het

gevraagde), één van de belangrijkste denkmethoden die er bestaan. Het toepassen van de wiskundige kennis, de stelling van Pythagoras, is maar een deel van de oplossingsmethode.
En wat doe je, als leerling of volwassene, als je 'alles' bent vergeten? Er is altijd wel een rudiment in het geheugen achtergebleven, maar welk rudiment helpt bij het reconstrueren van het gehele complex van stelling en toepassing? Voor veel mensen is dat toch een visueel element, dus het plaatje van de rechthoekige driehoek tekenen met de vierkanten op de zijden. Dat pleit ervoor om de stelling van Pythagoras te formuleren en te memoriseren in termen van oppervlakte, zoals de oude Grieken het ook deden. Aan het plaatje zit dan vanzelf de herinnering vast dat twee vierkanten samen dezelfde oppervlakte hebben als het derde vierkant. Uit de tekening volgt dan wat het grootste vierkant is. Hoe rekende je daar ook al weer mee? Als voorgaande reconstructie deugt, dan lijkt het didactisch beter om ook in het werkschema te gaan werken met oppervlakte op een zijde in plaats van met kwadraten. In de aanloop naar de stelling van Pythagoras kun je dat visuele element natuurlijk voor de hand liggend versterken door leerlingen concreet vierkanten te laten knippen, schuiven en oppervlakten te laten berekenen. In havo-vwo kun je daar een knipbewijs aan vast koppelen.

Werkschema's voor rekenpartijen

De verhoudingstabel is eveneens een goed werkschema, omdat die de leerlingen verplicht eerst de gegevens (*situatieanalyse*) en het gevraagde (*doelanalyse*) in te vullen; zie figuur 4.
Leerlingen (mensen) raken snel de draad kwijt bij ingewikkelde verhoudingsproblemen, zoals onze collega's van andere vakken kunnen bevestigen. Het opzetten en invullen van een verhoudingstabel dwingt om het probleem te verkennen, de gegevens op een rijtje te zetten, het gevraagde te verhelderen en de berekening overzichtelijk neer te schrijven, en tenslotte om de regels van de verhoudingstabel (de wiskundige kennis) doelgericht toe te passen.
Hoe kom je erop als je 'alles' bent vergeten? Het rudiment zal het idee zijn dat je een tabel zou kunnen maken, waarin je de twee (of meer) variabelen tegen elkaar uitzet. Het helpt als je dat niet alleen in de wiskundeles hebt gedaan, maar ook bij alle andere vakken op school. Daar ligt een missie van de wiskundeleraar naar zijn collega's. Vervolgens wordt het puzzelen, opnieuw uitvinden waar de getallen en de vraagtekens moeten staan. De wiskundige regel (*weten dat*) laat zich wel uit de context afleiden.

Ook de ketting van rekenpijlen (ook voor het eerst bij SMP gezien) of machientjes is een sterk werkschema, waarmee leerlingen voor hen lastige formules kunnen hanteren. In figuur 5 gaat het om een context waarbij de ketting structuur aanbrengt in de mogelijke rekenpartijen. Tot ver in 4 vmbo blijken leerlingen goed met deze ketting heen en terug te kunnen rekenen, terwijl de bijbehorende formules of vergelijkingen heel wat problemen opleveren.
Reconstructie van een ketting vindt plaats op basis van het uitschrijven van een rekenvoorbeeld (Pólya) in de beschreven context. De huurprijs voor 8 uur is $8 \times 30 + 25$ euro, voor 10 uur is dat $10 \times 30 + 25$ euro, enzovoort.

In figuur 6 heeft de ketting juist de functie om een formule op te breken in rekenstappen en daardoor de berekening te structureren. Ook nu geldt weer dat de verplichting om eerst een kaal schema (hier een pijlenketting) in te vullen de leerlingen dwingt om de formule te analyseren, de gegevens en het gevraagde op de goede plaats in te vullen, kortom om een probleemanalyse uit te voeren, voordat er wordt gerekend.
Eigenlijk geeft de ketting veel beter de essentie weer van het verband tussen de tijd en de valhoogte dan de formule. Je begint met een waarde voor t (de onafhankelijke variabele), die waarde kwadrateer je, enzovoort, totdat je uiteindelijk de bijpassende waarde van h (de afhankelijke variabele) vindt. Dit kernconcept van een functie gaat helemaal verloren als je rechtstreeks in de formule gaat substitueren.

Leren onze leerlingen beter denken?

Het antwoord op de vraag of onze vmbo-leerlingen dankzij hun wiskundelessen beter leren redeneren (denken) hangt, denk ik, voor 100% af van de didactiek waaraan zij in die jaren zijn onderworpen. Wie kent niet de collega die zich concentreert op het klakkeloos instampen van regels, trucs en verkortingen en die zaken vervolgens probeert in te slijpen? In mijn jonge jaren als wiskundeleraar heb ik op die manier matige hbs-klassen naar goede eindexamenresultaten opgestuwd. Waarna ze alles meteen weer vergaten.
Gelukkig kennen we ook de collega's die doorvragen, die laten zien hoe een aanpak werkt, die eisen dat leerlingen hun resultaten verantwoorden en controleren, die eerst maar eens verbieden niet-inzichtelijke verkortingen toe te passen, enzovoort.
Collega's die kans zien om denkmethoden zoals hiervoor besproken te expliciteren en leerlingen laten ervaren dat het helpt om hun aanpak op die manier te structureren.

Noot

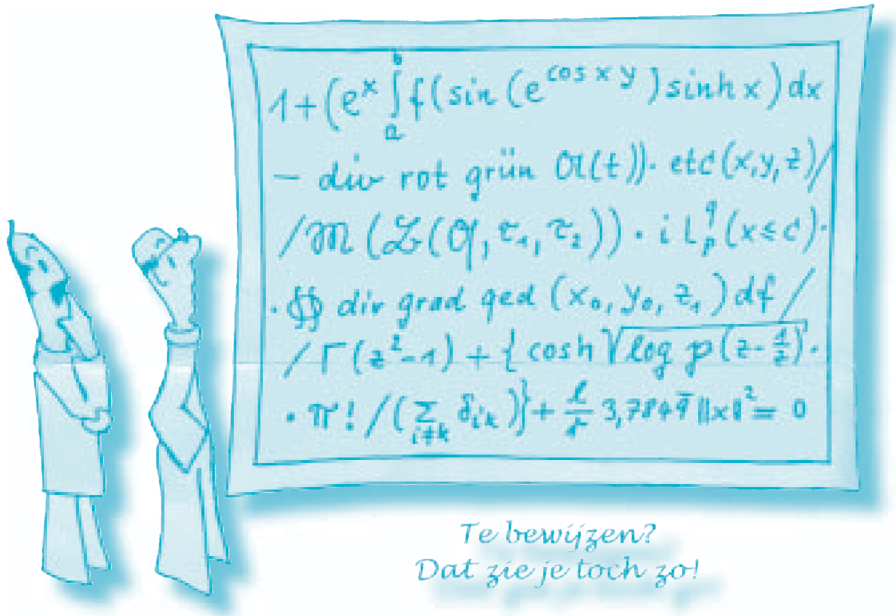
[1] SMP = School Mathematics Project; al tientallen jaren de grootste wiskundemethode in Engeland.

Over de auteur

Anne van Streun is wiskundeleraar sinds 1964, wiskundedidacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen sinds 1974, en hoogleraar didactiek bètawetenschappen sinds 2000.
E-mailadres: avstreun@euronet.nl
URL: www.rug.nl/fwn/voorzieningen/ido/betadidactiek/Onderzoek/onderzoekers/streun

BEWIJZEN IN DE LEERPLANNEN VAN DE 20E EEUW

[Wim Kleijne]



Inleiding

Al sinds de tweede helft van de 19e eeuw wordt de inhoud van het onderwijs aan de verschillende schooltypen vastgelegd in 'leerplannen'. En wanneer we naar kenmerkende aspecten van het onderwijs zoeken, ligt het voor de hand dat we deze leerplannen raadplegen. Zo vormt het 'bewijzen' naar mijn mening zo'n kenmerk van de wiskunde en van het wiskundeonderwijs. Op mijn zoektocht naar de rol en de plaats van het bewijzen in ons onderwijs van de 20e eeuw ga ik daarom te rade bij de leerplannen.
Over de wiskundeleerplannen heeft Wim Groen in 'Honderd jaar wiskundeonderwijs'[1] een instructief hoofdstuk geschreven, waarin hij een aantal algemene lijnen heeft beschreven.

Mijn opdracht wil ik zodanig interpreteren dat ik mij niet beperk tot het strikte, formele bewijzen, maar ruimer zal kijken naar de plaats van het correct wiskundig redeneren. Mijn zoektocht wil ik daarom uitstrekken tot het vinden van de plaatsen in de formele documenten waar het 'redeneren en bewijzen' genoemd worden. Met instemming citeer ik in dit verband de 'Studiecommissie Wiskunde B VWO' in haar rapport uit 1994 (zie [2], blz. 62):

Helder redeneren vereist dat de leerling zich er voortdurend rekenschap van geeft dat de dingen die hij zegt of opschrijft een betekenis hebben en zich lenen voor begrip en niet slechts voor toepassing van een aangeleerd recept.

De tocht door de leerplannen van de 20e eeuw zal ik daarom toespitsen op de vraag waar elementen van redeneren en bewijzen in de leerplannen te vinden zijn.

Situatie begin 20e eeuw

Het begin van de 20e eeuw vormde een roerige periode. Er waren behoorlijk wat sociale en politieke kwesties die de gemoederen bezighielden en de politieke agenda bepaalden. In onderwijsland was de plaats van het bijzonder onderwijs ten opzichte van het openbaar onderwijs een hot issue. In 1917 mondde dit uit in de zogenoemde 'onderwijspacificatie', waarbij de vrijheid van oprichting en inrichting van het onderwijs en de financiële gelijkstelling van het bijzonder onderwijs met het openbaar onderwijs werden vastgelegd.
Vanwege de vrijheid van het bijzonder onderwijs was het de rijksoverheid niet mogelijk richtlijnen te geven met betrekking tot de inhoud van het onderwijs op bijzondere scholen. Zij kon dit slechts doen voor haar 'eigen' rijksscholen. Wél kon zij eisen stellen aan de examens door examenprogramma's voor de verschillende vakken vast te stellen. En aan deze eisen moesten natuurlijk ook de kandidaten van bijzondere scholen voldoen. Zo was de situatie gedurende de gehele eeuw: rijksleerplannen alleen voor de rijksscholen, examenprogramma's per vak voor álle scholen. Het spreekt voor zich dat deze examenprogramma's als basis dienden van het daadwerkelijke onderwijs op alle scholen, waardoor deze programma's als een soort globale leerplannen zijn gaan functioneren.

Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde

Interimrapport

met toegevoegde discussienota's

mei 1967

Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde

Toelichting

op het

Leerplan Wiskunde

april 1968

Gegevens voor dit artikel heb ik daarom niet alleen gezocht in de rijksleerplannen, maar ook in de examenprogramma's voor het vak wiskunde. Een mooie bron hiervoor vormen de verschillende uitgaven van 'Kruijtbosch'[3] en de Staatsbladen[4] waarin de rijksleerplannen en examenprogramma's werden gepubliceerd. Gedurende de eeuw bestonden er diverse schooltypen die wij nu niet meer kennen: hbs, mms, (m)ulo, ambachtsschool, huishoudschool e.d. Daarnaast natuurlijk het gymnasium. De situatie met betrekking tot het 'bewijzen' zal ik voornamelijk nagaan aan de hand van hbs en gymnasium, die min of meer vergelijkbaar zijn met het huidige havo, atheneum en gymnasium. De (m)ulo, ambachtsschool en huishoudschool, waar het onderwijs in de wiskunde een 'afgeleide' was van dat van hbs en gymnasium, kunnen min of meer vergeleken worden met het vmbo. Wanneer we ons concentreren op hbs en gymnasium dan zouden we een redelijk beeld moeten krijgen van ons onderwerp gedurende de 20e eeuw.

De periode tot 1960

Bij Koninklijk Besluit van 18 september 1912 is het examenprogramma voor het hbs-examen wiskunde vastgesteld. Opvallend is het globale karakter van de beschrijving, nergens gedetailleerde stofomschrijvingen of -afbakeningen. Wat betreft 'redeneren en bewijzen' zijn de volgende zinsneden te vinden:
Hij behoort de door hem toegepaste leerwijze te kunnen verklaren...
De candidaat heeft het bewijs te leveren, dat hij een duidelijk begrip heeft van de eischen van een wiskundig betoog en van het onderling verband der onderscheiden leerstukken.
We kunnen hierin lezen dat aan het 'redeneren en bewijzen' enige aandacht geschonken diende te worden.

Deze tekst heeft het examen beheerst tot het eind van de jaren dertig. Bij KB van 31 december 1936 werd een nieuw examenprogramma geformuleerd. Als te examineren vakken werden genoemd reken- en stelkunde (= algebra), driehoeksmeting (= gonio- en trigonometrie), stereometrie en beschrijvende meetkunde. Per vak werden de onderwerpen in één à twee zinnen beschreven. In het gehele stuk geen woord over 'redeneren en bewijzen' of iets wat daar in de verte op lijkt.

Deze situatie duurde tot het eind van de vijftiger jaren. Bij KB van 29 januari 1960 werd het examenprogramma voor wiskunde op de hbs gewijzigd. Met ingang van 1961 werd de wiskunde geëxamineerd in de vakken algebra, goniometrie, analytische meetkunde en stereometrie. Ten aanzien van de te behandelen stof werd verwezen naar de leerstof die volgens het rijksleerplan (KB van 30 augustus 1958) voor de genoemde vakken moest worden onderwezen. Wanneer we dit leerplan bestuderen, dan valt met betrekking tot 'redeneren en bewijzen' het volgende op.
- Meetkunde: *Omkeren van stellingen. Indirecte bewijzen.*

Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde

4

Toelichting

op het

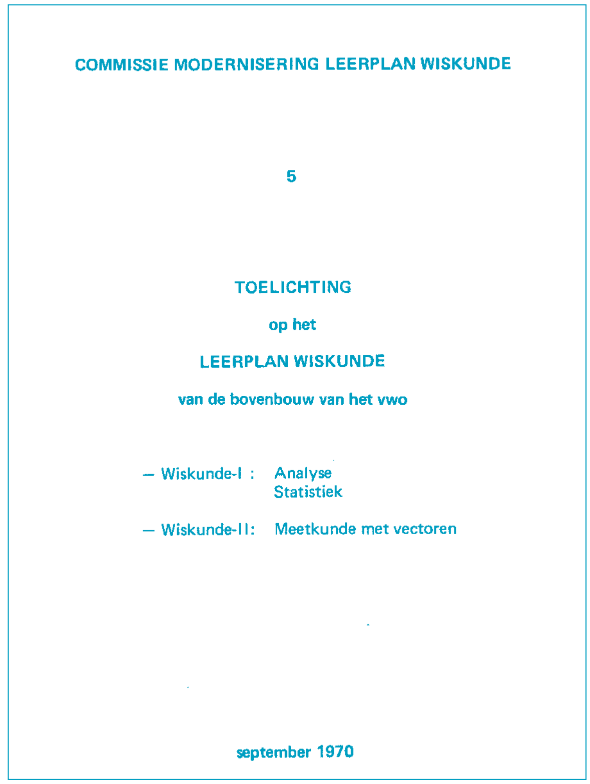
Leerplan Wiskunde

van de

mavo, onderbouw havo en

onderbouw vwo

mei 1969


COMMISSIE MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

5

TOELICHTING

op het

LEERPLAN WISKUNDE

van de bovenbouw van het vwo

— Wiskunde-I : Analyse
Statistiek

— Wiskunde-II: Meetkunde met vectoren

september 1970

- Stereometrie: *De deductieve denkwijze, axioma's en grondbegrippen.*
In deze besluiten werd geen aandacht besteed aan de implementatie van het bepaalde. Wanneer we oude schoolboeken raadplegen dan zien we dat hier ook geen sprake was van nieuwe dingen. De genoemde zaken met betrekking tot het correct wiskundig redeneren werden al lang beoefend en in de leerboeken behandeld. Veeleer was er sprake van een vastlegging van wat al jarenlang de praktijk was. Je krijgt zelfs de indruk dat het min of meer vanzelf sprak dat het correcte redeneren en het bewijzen tot de kern behoorden van het wiskundeonderwijs. Dat wordt ook zichtbaar in de examenopgaven: ook daarin geen sprake van een nieuwe trend.

Voorbeeld uit het leerboek 'Vlakke meetkunde' door H.C. Derksen (1951)[5].
In het Voorbericht (overgenomen uit de tweede druk uit 1910) staat: 'Als ideaal beschouw ik die wijze van behandeling, welke het best *logische bewijsvoering leert*.'
Op de eerste pagina: 'Eerste axioma: Een rechte lijn is door twee punten bepaald.'
En op bladzijde 15: '*Stelling* 5: Als twee lijnen niet evenwijdig zijn, dan zijn (bij snijding door een derde lijn) de overeenkomstige hoeken niet gelijk.
Bewijs: Als de lijnen niet evenwijdig zijn, dan zijn ....
Vul dat in! De stellingen 4 en 5 bewijzen we door wat niet waar kan zijn op grond van het vooraf bewezene uit te sluiten, waardoor het ware overblijft. Zulke bewijzen heten *indirecte bewijzen of bewijzen uit het ongerijmde*. Tonen we rechtstreeks aan, dat een stelling waar is, dan leveren we een *rechtstreeks* of *direct bewijs*.'

De CMLW

Al snel hierna, in 1961, werd de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) ingesteld met de opdracht voorstellen te doen voor een meer radicale modernisering van het wiskundeonderwijs.
In 1968 werden op voorstel van de CMLW grote veranderingen ingevoerd, tegelijk met de invoering van mavo, havo en vwo door de zogeheten Mammoetwet. Zo werd voor wiskunde een nieuw leerplan geschreven (o.a. de introductie van de verzamelingen, introductie van een zogenoemde intuïtieve inleiding in de meetkunde, transformatiemeetkunde e.d.) en nieuwe examen-programma's opgesteld voor de nieuw ingevoerde vakken wiskunde I (analyse en statistiek) en wiskunde II (meetkunde met vectoren).
In de tekst van de leerplannen wiskunde voor mavo, havo en vwo is niets te vinden dat op 'redeneren en bewijzen' slaat. Maar de leerplantekst is niet het enige dat van belang is. Hoe met het leerplan omgegaan dient te worden, hoe het in de praktijk geïnterpreteerd moet worden, werd in toelichtingen van de CMLW beschreven.
In de Toelichting op het Leerplan Wiskunde (CMLW, april 1968)[6] vinden we met betrekking tot 'redeneren en bewijzen' het volgende.
Wat (...) niet verloren mag gaan is:

a. het verkrijgen van inzicht in de betekenis van een mathematisch bewijs;
b. (...)
Wat verder essentieel is (...) is het verkrijgen van inzicht in de structuur van het platte vlak en van de ruimte. Tot nog toe werden weliswaar een groot aantal eigenschappen bewezen, maar voor de leerling bleef het een opeenstapeling van stellingen, (...)
(...) ook op deze nieuwe manier (bedoeld is het werken met transformaties) [*zal men*] *eigenschappen met een bewijs moeten staven. (...)*
Het is de bedoeling dat men na de intuïtieve inleiding met behulp van transformaties meer deductief te werk gaat. *D.w.z. hij kan beginnen op voorzichtige wijze hier eigenschappen af te leiden door het geven van redeneringen en kan t.z.t. wijzen op het belang van een mathematisch bewijs. Zonder enige tijd eigenschappen van figuren op grond van een redenering afgeleid te hebben, kan de leerling niet toegankelijk zijn voor de waarde van het bewijzen. (...)*
En onder 'definities':
Wezenlijk is wel, dat men van meet af aan de leerling eraan went zijn gedachten zo zuiver mogelijk onder woorden te brengen en van elke nieuwe term de betekenis nauwkeurig vast te leggen.

Voorbeeld uit het leerboek 'Van A tot Z', deel 1a, uit 1968[7].
In het Voorwoord staat:
'De didactische principes volgens welke te werk is gegaan zijn o.a. de volgende:
1. Een inductieve inleiding in de meetkunde.
2. Een geleidelijke groei naar deductief denken.'
(Ik ga nu niet in op het verschil tussen een inductieve en een intuïtieve inleiding, WK.)
Deze principes zijn duidelijk verwerkt in de opbouw van de tekst.

Het voorgaande slaat op de mavo en de onderbouw havo en vwo. De Toelichting van de CMLW voor de bovenbouw van het vwo gaat onder andere over de analyse en de statistiek van Wiskunde I. In het kader van 'redeneren en bewijzen' zijn stevige discussies gevoerd over de mate van 'strengheid van behandeling'. Hierbij kan onder andere gedacht worden aan psilontiek-beschouwingen voor limieten e.d. De CMLW schrijft:
Waar de een meent dat essentieel in de wiskunde juist de strenge redeneervorm is, zodat hij volstaan wil met een klein, maar volledig uitgediept programma, zal de ander betogen dat het voor de middelbare scholier essentieel is een overzicht te krijgen over een zo breed mogelijk veld, wat dan weer ten koste van de strengheid moet gaan. De waarheid zal als steeds wel weer ergens in het midden liggen.

Voor de statistiek lagen de zaken nog ingewikkelder. Op schoolniveau kan een zekere mate van circulariteit in de redeneringen nauwelijks vermeden worden. Ondanks de gegeven kansdefinities, ondanks methoden uitgaande van bijvoorbeeld Venn-diagrammen bleven statistische beschouwingen toch min of meer intuïtief gebaseerd.

Als we terugkijken zien we dus dat de tekst van leerplan en examenprogramma van 1968 weinig tot niets vertelde over plaats en rol van redeneren en bewijzen in de wiskunde. Desondanks stond dit onderwerp in het centrum van de belangstelling. Er werden officiële toelichtingen en talloze discussies en artikelen aan gewijd. Even bladeren in oude jaargangen van ons lijfblad Euclides overtuigt ons daarvan. Een willekeurige greep uit de jaargang 1970/1971:
- een niet-aanschouwelijke introductie van de begrippen limiet en continuïteit;
- gelijkwaardigheid;
- de implicatie;
- volledige inductie.
Allemaal stukken waarin het onder andere gaat over wiskundig correct redeneren.

Maar dan zal dat wellicht ook het geval geweest zijn in daaraan voorafgaande jaren. Inderdaad is dat waar. We zagen al dat leerplannen en examenprogramma's van 1920 tot 1968 bitter weinig over 'redeneren en bewijzen' formuleerden. Maar het bewijzen stond wel degelijk centraal in de dagelijkse onderwijspraktijk. Ouderen weten dat uit eigen schooltijd, maar we zien dat ook in oude schoolboeken. Met name in de meetkunde kwam het bewijzen prominent naar voren.
Gegeven: ...
Te Bewijzen: ...
Bewijs: ...
(af te sluiten met *q.e.d. : quod erat demonstrandum, hetgeen te bewijzen was.*)
Ja zelfs meenden we een soort axiomatiek te kunnen bedrijven op de school (in de aanvangsmeetkunde en in de stereometrie).
De praktijk is rijker dan de letter van het plan of het programma. De CMLW expliciteerde de praktijk, waarbij ernst werd gemaakt met didactische en pedagogische overwegingen: wat kunnen leerlingen aan, wat is nodig en wenselijk?

Maar laten we niet denken dat dergelijke overwegingen voorbehouden zijn aan de tijd vanaf 1968. Ik heb hier voor mij liggen een tekst van J. Kleefstra, 'Over het onderwijs in de wiskunde' uit 1909 (!)[8]. Hij hield al een stevig pleidooi om bij het onderwijs in de wiskunde ernstig rekening te houden met de jongere van de school. Zo schrijft hij:
De schrijvers van wiskundige boeken, alsmede de leeraren, die 't onderwijs volgens deze handleidingen geven, zijn daarentegen bijna zonder uitzondering akademisch gevormde mannen, die bij het schrijven van hun werken, of het geven van hun onderwijs nog in nauwe gemeenschap staan met het onderwijs van hun professoren. Zij laten zich, dunkt mij, onbewust leiden door de gedachte: zóó heeft mijn professor mij de wiskunde geleerd en zóó zal ik haar dus aan mijn leerlingen doceeren; (...)
En zo vraagt hij om de 'strengheid' van behandeling, zeg maar het 'redeneren en bewijzen', niet alleen te laten afhangen van de eisen van het vak, maar ook van de leerlingen die dit vak moeten leren.

Na 1968

Hoe gaat het verhaal na 1968 nu verder? In 1978 werd de werkgroep van advies voor de herverkaveling examenprogramma wiskunde I en wiskunde II vwo ingesteld (HEWET)[9]. In 1984 een soortgelijke werkgroep voor wijziging van het eindexamenprogramma wiskunde havo (HAWEX)[10]. Beide adviseringen leidden in de 80'er jaren tot de wiskundeprogramma's A en B op vwo en havo. In beide schooltypen gaat het hierbij om wiskunde waarbij buiten-wiskundige contexten en toepassingsgerichte aspecten in toenemende mate centraal gesteld zijn.
Wanneer ik de rapporten van toen weer eens nalees op 'redeneren en bewijzen', dan vind ik in het vwo-rapport:
In het wiskunde B-programma is aanzienlijk minder tijd voor ruimtemeetkunde beschikbaar dan er in het voormalige v.h.m.o. aan stereometrie werd besteed. Daarom heeft de werkgroep in haar voorstel afgezien van een min of meer axiomatische opzet. Een niet-axiomatische opbouw sluit overigens het kunnen geven van verstandige redeneringen niet uit. Het is zeer wenselijk dat daar voldoende aandacht aan besteed wordt.
Opvallend is de motivering van het laten vallen van een min of meer axiomatische opzet: tijdgebrek. Pedagogische of didactische overwegingen worden niet genoemd.

Met betrekking tot 'redeneren en bewijzen' schrijft het havo-rapport:
(...) er zal van tijd tot tijd expliciet aandacht besteed moeten worden aan redeneervormen, niet alleen binnen wiskundige contexten, maar ook in situaties ontleend aan het dagelijks leven.
(...)
Aan de orde zouden kunnen komen:
- het formuleren van eenvoudige redeneringen;
- het kritisch beoordelen van een redenering;
- het verschil tussen een plausibele conclusie en een conclusie verkregen door deductie;
- het opsporen van verzwegen premissen en argumentaties;
- het herkennen van logische uitdrukkingen in teksten;
- het verschil tussen nodige en voldoende voorwaarden;
- het verschil tussen een implicatie en zijn omgekeerde;
- het nagaan of een uitspraak in overeenstemming is met verstrekte gegevens.
Dat betekent dat aanbevolen werd aan het wiskundig redeneren behoorlijke aandacht te schenken. Maar van 'bewijzen' werd niet meer gerept, noch voor havo, noch voor vwo.

In de basisvorming kreeg ieder vak zijn zogenoemde kerndoelen. Aan het eind van de eeuw werden deze gewijzigd vastgesteld voor de periode 1998 – 2003[11]. Het enige dat in het kader van 'redeneren en bewijzen' hierin te vinden is, is het volgende:
Het onderwijs in de wiskunde is erop gericht dat de leerlingen:
- een wiskundige werkhouding ontwikkelen, waarbij systematisch en methodisch werken, generaliseren, kritisch beoordelen van gegevens en uitkomsten alsmede het creatief bedenken van oplossingen aan de orde komen;
- wiskundige taal verwerven als communicatiemiddel en gevoel ontwikkelen voor wiskundige denkwijzen;
(...)
Het vak draagt in ieder geval bij aan het realiseren van de volgende onderdelen van de algemene onderwijsdoelen:
(...)
- het ontwikkelen van onderzoeks- en redeneerstrategieën om problemen aan te pakken; (...)
Eigenlijk lezen we nu dus niet veel over 'redeneren en bewijzen'.
Ik ben dit artikel begonnen met de opmerking dat naar mijn mening correct wiskundig redeneren tot de kernaspecten van de wiskunde en het wiskundeonderwijs behoort. Met betrekking tot de basisvorming tot 2003 komt dit naar mijn mening maar heel povertjes naar voren. Natuurlijk was het meer dan terecht dat voor kinderen van 12 jaar de axiomatische opbouw vervangen werd door intuïtieve en inductieve inleidingen. Maar mijn indruk is dat er sindsdien te weinig aandacht is geweest voor introductie in correct wiskundig redeneren.

De Tweede fase

En hoe zou het in de Tweede fase zijn? In de formulering van de examenprogramma's vwo A en B staat in dit verband het volgende onder het domein Vaardigheden:
De kandidaat kan
logische relaties tussen gegevens, beweringen en resultaten aanbrengen en beoordelen en relevante gegevens scheiden van minder relevante gegevens.
Hierin kan men met enige goede wil iets van logisch argumenteren lezen.
Hiernaast is er in het programma vwo wiskunde B12 onder het domein 'Voortgezette meetkunde' een apart subdomein 'Bewijzen in de vlakke meetkunde'[12]:
De kandidaat kan
- het verschil aangeven tussen een definitie en een stelling;
- het verschil aangeven tussen een vermoeden en een stelling;
- in relevante gevallen het verschil tussen een stelling en haar omkering herkennen en beoordelen welke van de twee bij een bepaald bewijs een rol spelen;
- de structuur van een gegeven bewijs doorgronden;
- verschillende technieken hanteren bij het geven van een bewijs of het weerleggen van een vermoeden, zoals:
** het redeneren vanuit het ongerijmde, (...)*
** het geven van een tegenvoorbeeld.*

Een en ander betekent dat dus alleen voor B12-kandidaten een aantal facetten van 'bewijzen' aan de orde gesteld worden en dan alleen in de voorbereidingsfase voor het examen.
De conclusie van het voorgaande moet mijns inziens dan ook zijn dat het 'redeneren en bewijzen' eind 20e eeuw in de programmabeschrijvingen in het algemeen,

dus voor alle leerlingen, nauwelijks te vinden is. Alleen voor de vwo B12-leerlingen is er een apart subdomein voor ingeruimd, gerelateerd aan vlakke meetkunde. De officiële documenten zien het 'bewijzen' dus kennelijk niet als een fundamenteel kernaspect van de wiskunde, althans binnen het voortgezet onderwijs.

Slot

We zagen dat het 'redeneren en bewijzen' door de afgelopen eeuw heen wél genoemd werd, maar, met een enkele uitzondering, nooit precies geformuleerd werd in de programma's. De officiële documenten, zoals leerplannen en examenprogramma's, waren altijd zeer summier op dit punt. Wellicht vond men dat gedurende een lange periode niet zo nodig en sprak het vanzelf dat deze aspecten grondig aan de orde kwamen. In ieder geval wijzen de schoolboeken uit dat het 'bewijzen' tot eind 70'er jaren goed aan de orde kwam. Later kwam dit aspect in een ander daglicht te staan, mede onder invloed van de verbeterde aandacht voor datgene wat past bij jongere kinderen. Maar er is daardoor wel erg veel verdwenen, misschien wel té veel. We moeten namelijk constateren dat van 'redeneren en bewijzen' aan het eind van de 20e eeuw in de programmabeschrijvingen vrijwel niets meer over was. En dat gold ook voor de leerboeken en, als gevolg daarvan, met een enkele uitzondering, ook voor de dagelijkse onderwijspraktijk. In ieder geval was er aan het eind van de 20e eeuw geen sprake meer van dat alle leerlingen leerden dat 'bewijzen' en 'streng logisch redeneren' een fundamenteel kernaspect is van de wiskunde. Alleen voor een zeer kleine groep (de B12-leerlingen) werd aan dit aspect aandacht geschonken. Nu, vijf jaar later, lijkt de situatie iets te veranderen. In de kerndoelen voor de basisvorming lezen we nú voor het vak wiskunde (dus geldig voor alle leerlingen):
De leerling leert een wiskundige argumentatie op te zetten en te onderscheiden van meningen en beweringen en leert daarbij met respect voor ieders denkwijze wiskundige kritiek te geven en te krijgen.
En dat lijkt mij een mooie basis om in de 21e eeuw mee verder te gaan.

Literatuur

[1] F. Goffree e.a. (red.): Honderd jaar wiskundeonderwijs. Leusden: NVvW (2000).
[2] Wiskunde B VWO, Rapport van de studiecommissie wiskunde B vwo. Oktober 1994.
[3] Ir. D.J. Kruijtbosch (en ir. S.J. Richter): Schriftelijke opgaven van het eindexamen H.B.S.-B. Groningen: Wolters(-Noordhoff); vele drukken vanaf 1916.
[4] Staatsbladen (publicatiemedium voor de KB's).
[5] H.C. Derksen: Vlakke Meetkunde, 8e druk. Hilversum (1951).
[6] Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde: Interim rapport mei 1967 / Toelichtingen op het leerplan wiskunde. April 1968, mei 1969, september 1970.
[7] Drs. C. Boermeester, B. Burger, dr. P.M. van Hiele: Van A tot Z, deel 1a. Purmerend (1968).
[8] J. Kleefstra: Over het onderwijs in de wiskunde. Haarlem: H.D. Tjeenk Willink & Zoon (1909).
[9] Rapport van de werkgroep van advies voor de herverkaveling eindexamenprogramma's wiskunde I en wiskunde II v.w.o.
[10] Rapport van de werkgroep ter voorbereiding van wijziging van het eindexamenprogramma wiskunde h.a.v.o.
[11] Ministerie van OCenW: Kerndoelen basisvorming 1998–2003. Den Haag: Uitgeverij Sdu (1998).
[12] Zie bijvoorbeeld de website van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren: www.nvvw.nl > eindtermen.

Illustratie op pag. 159

Naar Friedrich Wille in 'Humor in der Mathematik' (Göttingen: VandenHoeck & Ruprecht, 1982).

Over de auteur

Drs. Wim Kleijne is oud-wiskundeleraar, oud-schoolleider en gepensioneerd als inspecteur voortgezet onderwijs. Momenteel is hij voorzitter van de staatsexamencommissie, lid van de profielcommissies en lid van de NOCW, de Nederlandse Onderwijs Commissie voor de Wiskunde.
E-mailadres: wim.kleijne@xs4all.nl

EINDIG, ONEINDIG, MEER DAN ONEINDIG

Een boekbespreking

[Chris van der Heijden]

'Eindig, Oneindig, meer dan Oneindig; grondslagen van de wiskundige wetenschappen'
Auteur: Leon Horsten
Uitgeverij: Epsilon Uitgaven, Utrecht 2004
ISBN 90-5041-086-3
Prijs: € 21,00

Inleiding

De auteur prof.dr. L. Horsten, werkzaam als hoogleraar aan het Instituut voor Wijsbegeerte van de Katholieke Universiteit Leuven, voorziet met het door hem geschreven boek 'Eindig, Oneindig, meer dan Oneindig' in een leemte. Immers, voor niet-wiskundigen is de wiskunde het toonbeeld van precisie, vaak gezien als een wetenschap waar alles volkomen logisch sluit en waar men niets tegenin kan brengen. Wiskundigen weten echter wel beter. Wanneer studenten aan d'Alembert vragen stelden over de fundering van de analyse, placht deze te zeggen: *Allez en avant, la foi vous viendra*. Goede wiskundigen, door ervaring wijs geworden, voelden na verloop van tijd aan welk soort argumenten betrouwbaar waren en welke niet. De wiskunde berustte hierbij meer op intuïtie dan op een theoretische fundering. Het wiskundegebouw, mooi van architectuur, was daarom gegrondvest op een zwak fundament. Hierin is verandering gekomen aan het einde van de 19e en het begin van de 20e eeuw. Inmiddels heeft het onderzoek naar de grondslagen van de wiskunde zich verspreid over de deelgebieden bewijstheorie, modellentheorie, verzamelingentheorie, berekenbaarheidstheorie en toegepaste logica, waarbij de berekenbaarheidstheorie een sterke impuls heeft gekregen van de computerwetenschappen en omgekeerd.
Wie echter een boek openslaat om zich te verdiepen in een van deze deelgebieden ziet het vaak bijna letterlijk zwart voor de ogen van alle symbolen en formules en dit werkt niet direct motiverend. Door de vele details gaat het zicht op het geheel en de onderlinge samenhang verloren. Daarom is het toe te juichen dat dit boek verschenen is. De auteur is erin geslaagd, een goed overzicht te geven van de grondslagenstudies van de wiskunde en computerwetenschappen vanaf einde 19e eeuw tot in het heden. Het is geschreven in de vorm van een historische en thematische benadering. De wisselwerking tussen het grondslagenonderzoek en de filosofie van de wiskunde krijgt ruime aandacht en men krijgt inzicht in de raakvlakken tussen de deelgebieden van het grondslagenonderzoek.

Inhoud

Een totale beschrijving van de rijke inhoud van dit boek is ondoenlijk. Om toch een indruk te geven worden enkele hoofdlijnen aangestipt en enkele passages geciteerd zoals die in dit boek voorkomen.

In *hoofdstuk 1* geeft de auteur het grondslagenonderzoek van de wiskundige wetenschappen een plaats naast de filosofie van de wiskundige wetenschappen binnen het ruimere kader van de wetenschapsfilosofie. Het instrument van het grondslagenonderzoek is de logica.

Hoofdstuk 2 geeft vooral een historisch overzicht van de axiomatisering van de getallentheorie, logica en verzamelingenleer. Aan de orde komen de Peano-axioma's (*PA*) voor de natuurlijke getallen, de axiomatisering van de reële getallen door Dedekind en de reductie van de reële getallen via de rationale getallen tot de natuurlijke getallen met het daarbij optredende probleem van de oneindigheid van de rationale en natuurlijke getallen. Het was en is de vraag of men de reële getallen wel of niet als voltooide objecten kan beschouwen, dat wil zeggen als actueel of potentieel oneindige objecten. Het was Frege die nog verder ging en de eerste-orde logica ontwikkelde, als poging om zelfs de basiswetten van de natuurlijke getallen te reduceren tot de zuivere logica. En Cantor, die in de door hem ontwikkelde verzamelingentheorie ook worstelde met het begrip

oneindig en inzag dat het verzamelingtheoretische universum zelf niet als een verzameling (dus als een voltooid object) gezien kon worden en daarom sprak over een inconsistente multipliciteit. De auteur laat de vergelijking zien die zich opdringt tussen de opvatting van de filosoof Heidegger en de opvatting van Cantor, een halve eeuw eerder:
1. het Zijn respectievelijk het wiskundig universum bestaat, en
2. het Zijn, het wiskundig universum, is niet toegankelijk voor het rationele denken.

Zermelo fundeerde de verzamelingentheorie door basisaxioma's, inclusief het door hem ingevoerde keuzeaxioma (*ZFC* = Zermelo-Fraenkel-Choice). Het beperkte comprehensie-axioma van *ZFC*, dat zegt dat elke eigenschap een verzameling isoleert uit een gegeven verzameling, was zo essentieel dat *ZFC* daardoor gezien kan worden als unificerende theorie voor de gehele wiskunde. De iteratieve opvatting van het verzamelingtheoretische universum,

$$
\begin{aligned}
0 &\equiv \varnothing \\
1 &\equiv \{\varnothing\} \\
2 &\equiv \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &\equiv \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&\dots \\
\omega &\equiv \mathbb{N} \\
\omega+1 &\equiv \mathbb{R} \\
\omega+2 &\equiv \{f \mid f \text{ is een } \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ functie}\} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

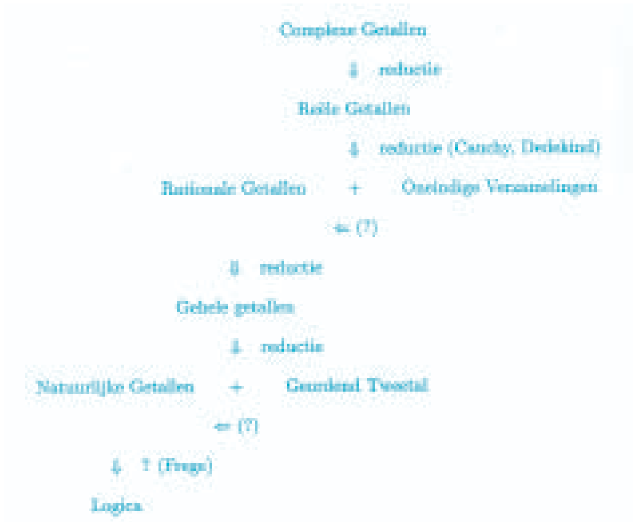
waarbij een verzameling, geïndexeerd door een ordinaalgetal, in een opvolgerstadium gegenereerd wordt vanuit de direct voorgaande gegenereerde verzameling, was voor Zermelo en Gödel een zo duidelijke evidentie, dat zij *ZFC* daarom als consistent beschouwden, wat overigens niet bewezen is.

In *hoofdstuk 3* komen de drie grote scholen over de grondslagen van de wiskunde aan de orde: het logicisme, het intuïtionisme en het formalisme.
Frege stelde zich ten doel de rol van de intuïtie in de analyse volledig te elimineren, Russell toonde aan dat Freges logicistische theorie over de grondslagen van de wiskunde onhoudbaar was (Russell-paradox). In de meetkunde daarentegen speelde volgens Frege de wiskundige intuïtie een essentiële rol.
Volgens het intuïtionisme is wiskunde essentieel een constructie-activiteit. Alles in de wiskunde bestaat uit mentale constructies: natuurlijke getallen, reële getallen, bewijzen en stellingen. Intuïtionisten wijzen actueel oneindige verzamelingen resoluut af. Oneindige objecten mogen niet als voltooide 'dingen' beschouwd worden. Enkel potentieel oneindige verzamelingen zijn in de constructie-activiteit gegeven. Daarom worden niet-constructieve existentiebewijzen afgewezen. De verwerping van het keuzeaxioma maakte echter sommige delen van de wiskunde minder toegankelijk. Het intuïtionisme heeft daardoor aan belang ingeboet. Grote namen in het intuïtionisme zijn Brouwer en Heyting.
Aan het formalisme moet de naam van Hilbert verbonden worden. Uitgangspunt van Hilbert was dat enkel de natuurlijke getallen ons concreet gegeven zijn. Uiteindelijk meende hij dat het er in de wiskunde enkel om gaat, stellingen over natuurlijke getallen te bewijzen. Hilbert vermoedde dat elke stelling over de natuurlijke getallen die met behulp van de hogere wiskunde kon worden bewezen in principe ook rechtstreeks, zonder omweg door de hogere wiskunde, kon worden bewezen. De hogere wiskunde moest dan wel consistent zijn. Om dit laatste te bewijzen stelde Hilbert voor om te proberen de consistentie van de basisprincipes van de hogere wiskunde uit te voeren in de Peano-rekenkunde zelf die hij onbetwijfelbaar achtte. De tweede van de in 1930 gepubliceerde twee onvolledigheidsstellingen van Gödel zegt echter dat geen enkele consistente theorie T waarvoor geldt $PA \subseteq T$ haar eigen consistentie kan bewijzen. Hieruit volgde dat de Peano-rekenkunde nooit de consistentie van de hogere wiskunde kon aantonen.

Was hier sprake van een drievoudige mislukking? Nee, want het logicistische project leidde tot de axiomatisering van de eerste-orde logica en indirect tot de tweede-orde logica. Het intuïtionisme leidde tot de berekenbaarheidstheorie en voorts leidden de onvolledigheidsstellingen van Gödel tot de bewijstheorie en verdieping van het inzicht in de modellentheorie, beide onderdelen van de logica.

Hoofdstuk 4 draagt de titel 'Verzamelingentheorie en platonisme'. Gödel was een platonist, hoewel de grondslagentheorie vanaf het begin tot in de jaren '50 van de 20e eeuw sterk anti-platonistisch was. Het onderscheid tussen concepten en objecten was voor hem fundamenteel: concepten zijn niet reduceerbaar tot objecten en omgekeerd zijn objecten niet reduceerbaar tot concepten. Hij zag een parallel tussen wiskundige objecten en concepten enerzijds en fysische objecten en eigenschappen anderzijds. Zijns inziens bestonden wiskundige objecten en concepten objectief, net zoals fysische objecten en hun eigenschappen. Een wiskundig principe kon men voor waar aanzien als de wiskundige intuïtie daartoe sterke aanleiding gaf, waarbij Gödel van mening was dat de wiskundige intuïtie trainbaar en corrigeerbaar was (intrinsieke evidentie). Als herhaalde pogingen om een contradictie af te leiden uit een wiskundig principe faalden dan kon men vermoeden dat het principe waar was (extrinsieke evidentie). Verder wordt in dit hoofdstuk het continuümprobleem aangesneden en wordt aandacht besteed aan zeer grote kardinaalgetallen, kardinaalgetallen waarbij men uitgaat van misschien mogelijke verzamelingen die groter zijn dan elke verzameling waarvan het bestaan door de axioma's van Zermelo gegarandeerd is.

FIGUUR 1 Globaal overzicht van de logica in de 19e eeuw (p. 22)



Eenvoudig voorbeeld van een niet-constructief existentiebewijs

Stelling 8 *Er bestaan irrationale getallen a en b zodat a^b een rationaal getal is.*

Bewijs Neem $a = b = \sqrt{2}$. Dan zijn er twee mogelijkheden.

1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ is een rationaal getal. Dan kunnen we stoppen, want dan voldoet $a = b = \sqrt{2}$.
2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ is een irrationaal getal. Beschouw dan:

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Dit betekent dat de getallen $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ en $b = \sqrt{2}$ aan de voorwaarden voldoen.

In de twee gevallen is dus aan de voorwaarden van de stelling voldaan.

□

Maar wat is nu het gezochte paar (a,b)? Is het $(\sqrt{2},\sqrt{2})$? Of is het $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}},\sqrt{2})$?

Was den Begriff "Unendlich" betrifft, so müssen wir uns klarmachen, daß "Unendlich" keine anschauliche Bedeutung und ohne nähere Untersuchung überhaupt keinen Sinn hat. Denn es gibt überall nur endliche Dinge. Es gibt keine unendliche Geschwindigkeit und keine unendlich rasch sich fortpflanzende Kraft oder Wirkung. Zudem ist die Wirkung selbst diskreter Natur und existiert nur quantenhaft. Es gibt überhaupt nichts Kontinuierliches, was unendlich oft geteilt werden könnte. Sogar das Licht hat atomische Struktur, ebenso wie die Wirkungsgröße. Selbst der Weltraum ist, wie ich sicher glaube, nur von endlicher Ausdehnung. [...] [D]as Unendliche ist nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden noch als Grundlage in unserem Denken ohne besonderen Vorkehrungen zulässig.

Hilbert [1930], p. 380–381.

FIGUUR 2 (p. 56)

Hoofdstuk 5 is getiteld: 'Effectieve berekenbaarheid'. In het grondslagenonderzoek wordt niet alleen het begrip wiskundig bewijs maar ook het begrip berekenbaarheid onderzocht. Ook hierbij kan een vergelijking getrokken worden, getuige de volgende uitspraak van R. Shore: *I would make the analogy that logic is to computer science what mathematics is to physics, and vice versa.* Het intuïtionisme slaagde erin om een wiskundige theorie van effectieve berekenbaarheid te ontwikkelen. Hierdoor werden de wiskundigen aangespoord om een dergelijke theorie ook in de klassieke wiskunde te ontwikkelen. Twee wiskundigen speelden hierin een hoofdrol.
De these van Church legde een relatie tussen de effectief of algoritmisch berekenbare functies op de natuurlijke getallen en μ-recursieve functies. Turing stelde zich een zodanig door vier eigenschappen geïdealiseerde menselijke rekenaar voor dat we die nu een Turing-machine noemen. Door Turings analyse van algemene berekenbaarheid werd Gödel overtuigd van de juistheid van de these van Church, die nu algemeen aanvaard wordt. In dit hoofdstuk wordt de lezer ook een blik in de toekomst gegund: kwantumcomputers die door parallelle rekenwijze het ontbinden van grote getallen in priemgetallen binnen redelijke tijd aankunnen met als consequentie dat de cryptografie op de helling moet.
Filosofisch interessant is Gödels disjunctieve these. Naast bewijsbaarheid in een axiomatisch systeem is er het intuïtieve, informele begrip van bewijsbaarheid, de zogenoemde absolute bewijsbaarheid. De vraag is nu of absolute bewijsbaarheid samenvalt met bewijsbaarheid in een axiomatisch systeem. Zo ja, dan bestaan er volgens de onvolledigheidsstelling van Gödel onbewijsbare wiskundige uitspraken. Zo nee, dan is de menselijke geest geen Turing-machine.

Hoofdstuk 6 tenslotte handelt over modellen en tweede-orde logica. Aan de orde komen de niet-standaardmodellen voor de rekenkunde en de analyse, de stellingen van Löwenheim-Skolem, Löwenheim en Friedman, de Tarski-test, de paradox van Skolem, categoriciteit en het continuüm.

Titel en taal

Dit boek geeft in essentie een overzicht van het onderzoek naar de grondslagen van de wiskunde. In dit onderzoek botst men op het begrip oneindig en probeert men grenzen te verleggen. De titel en ondertitel van dit boek zou men dan ook zonder bezwaar kunnen verwisselen.
De schrijver hecht groot belang aan talenkennis, gezien het volgende citaat: 'Net zoals de grondslagen van de wiskundige wetenschappen, behoren de grote talen tot onze gemeenschappelijke cultuur. Deze cultuur is uiteindelijk één en ondeelbaar.' Het boek bevat veel citaten in het Duits, Engels, Frans en Latijn met de bedoeling de grondslagenproblematiek in een ruimere culturele en historische context te plaatsen. We zullen het de schrijver dan ook niet kwalijk

nemen dat er hier en daar wat spellingproblemen optreden, niet zo verwonderlijk door de frequente veranderingen in de spelling van de Nederlandse en Vlaamse taal. In hoofdstuk 2 worden axiomatisering en axiomatizering naast elkaar gebruikt; op blz. 129 gaat het over een 'geïdealizeerde rekenaar'.

Voor wie is dit boek bestemd?

In de *Inleiding* van het boek wordt vermeld dat het bestemd is voor gevorderde studenten wiskunde, computerwetenschappen, filosofie, en voor al wie zich interesseert voor de grondslagen van de wiskunde en de computerwetenschappen. Voor het verkrijgen van de nodige voorkennis worden twee boeken aangeraden: *Computability and Logic* van G. Boolos e.a. en *The Incompleteness Phenomenon* van H. Goldstern e.a. Ook vertrouwdheid met het begrip Turing-machine is een vereiste. Op de achterflap lezen we echter dat het ingangsniveau is: vwo met wiskunde en enige basiskennis logica. Deze uitspraken zijn enigszins inconsistent.
Maar voor wie geïnteresseerd is in het onderzoek naar de grondslagen van de wiskunde geeft dit boek een goed overzicht en biedt het een uitstekend uitgangspunt voor voortgezette studie, zeker omdat de lezer gebruik kan maken van een voortreffelijke beknopte literatuurgids achter in het boek.
En waarom zouden er ook geen vwo-leerlingen zijn die veel plezier aan dit boek kunnen beleven? Immers Gödel was pas 24 jaar oud toen hij zijn baanbrekende stellingen publiceerde.

Over de recensent

Chris van der Heijden was van 1969 tot 2001 wiskundedocent en later ook schoolleider aan de scholengemeenschap CSG Blaise Pascal in Spijkenisse.
E-mailadres: chris-van-der-heijden@wxs.nl

INZIEN EN BEWIJZEN

Een boekbespreking

[Jacolien van Dijk]

'Inzien en bewijzen'
Auteurs: Jan van Eijck en Albert Visser
Uitgever: Amsterdam University Press (AUP), maart 2005
ISBN 90-5356-749-6
Prijs: € 17,50
Bijbehorende docenten-handleiding:
ISBN 90-5356-788-7;
prijs € 10,00

Exact in context

'Inzien en bewijzen' door Jan van Eijck en Albert Visser is het tweede deel uit de serie *Exact in context*, speciaal ontwikkeld voor gebruik in de Tweede fase van het voortgezet onderwijs. Geënt op de succesformule van de reeks *Tekst in context* voor het literatuuronderwijs biedt de reeks *Exact in context* informatie over ontwikkelingen in de exacte vakken (wiskunde, natuurkunde, informatica) met speciale aandacht voor de historische context. In 2002 is bij AUP het eerste deel uit deze reeks verschenen, getiteld: 'Denkende machines'.

Flaptekst

Op de achterflap van het handzame en stevig uitziende boekje lees ik het volgende: *De notie 'bewijs' vormt het hart van de exacte wetenschappen. De ontdekking van de methode om een onderwerp te presenteren in termen van axioma's, definities en bewijzen is een van de grote uitvindingen van de mensheid. (...) Formele bewijzen, leren begrijpen en zelf opzetten vormde eeuwenlang de hoofdmoot van het wiskundeonderwijs. Vandaag de dag is dat niet meer zo, omdat 'inzicht verwerven' belangrijker wordt geacht dan vaardigheid krijgen in het bewijzen. Bewijs en inzicht zijn echter twee kanten van dezelfde medaille: door te proberen bewijzen te leveren of doorgronden kom je tot inzicht, en om verworven inzichten over te dragen op anderen zijn bewijzen nodig.*

Aangezien ik mij alweer zeven jaar geleden tijdens mijn afstudeeronderzoek intensief heb bezig gehouden met het belang van redeneren en bewijzen, begin ik vol enthousiasme aan het eerste hoofdstuk. Hieronder volgt een samenvatting van mijn bevindingen, gerangschikt per hoofdstuk.

Het hart van de exacte wetenschap

In dit eerste hoofdstuk wordt mij op het hart gedrukt dat ik geen boekje in handen heb waarin gezellig over wetenschap wordt gepraat, maar dat het de bedoeling is dat de lezer van het boekje ook echt wiskunde gaat bedrijven: *Je gaat in dit boek leren hoe je zelf bewijsproblemen kunt aanpakken. Dan zul je ontdekken dat zelf leren bewijzen een uitstekende manier is om toegang te krijgen tot de wereld van de exacte wetenschap. Dat toegangsrecht krijg je niet cadeau: je moet het verdienen. Zelf bewijzen leveren is moeilijk, en wat moeilijk is, is alleen weggelegd voor wie talent heeft en bereid is zich in te zetten. Maar wie het wil leren zou daarbij geholpen moeten worden. In dit boek maken we daarmee een begin.*

Na enkele constructieopdrachten met passer en liniaal, waarvan de uitwerkingen te vinden zijn in de bijbehorende docentenhandleiding, volgen er twee stellingen met hun bewijs: 'De wortel uit 2 is geen breuk' en 'Er zijn oneindig veel priemgetallen'. Het eerste bewijs is goed te volgen. Er wordt hier verwezen naar de internetpagina[1] bij het boekje, alwaar een meetkunde-applet (gegenereerd met Cinderella) aanschouwelijk maakt dat je voor elke gegeven lengte a een x kunt construeren met $x^2 = a$. Het bewijs van de tweede stelling is een stuk abstracter en ik verwacht dat dit voor de ongeoefende leerling een brug te ver zal zijn.

Na deze bewijzen volgt er een paragraaf waarin wordt uitgelegd waarom juist deze twee bewijzen zoveel zeggen over de schoonheid en het nut van wiskunde.

(In)zien en bewijzen

In de eerste paragraaf van dit tweede hoofdstuk worden de natuurlijke getallen en de bewijsmethode 'volledige inductie' geïntroduceerd. Nadat deze methode vrij helder is uitgelegd kan er door leerlingen zelf worden geoefend met een bewijs via volledige inductie. Jammer dat er maar één opdracht volgt; ik had er graag nog een willen proberen. De volgende paragraaf staat voor mijn gevoel nogal op zichzelf: er volgen enkele opdrachten over 'delers' en 'kleinste delers'. Een scholier zal hier zelfstandig - denk ik - niet mee uit de voeten kunnen. De derde paragraaf van dit hoofdstuk laat zien dat plaatjes soms meer inzicht geven dan het toepassen van wiskundige technieken (zie figuur 1 op pag. 170).

Er volgt een paragraaf met vijf verschillende bewijzen van $1 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Aan de lezer wordt gevraagd na te gaan welk bewijs het meeste inzicht geeft. Het lijkt me een leuk idee de vijf bewijzen eens aan mijn klas voor te leggen om na te gaan of iedere leerling dezelfde voorkeur heeft.

'Meer bewijzen, meer inzicht' luidt de titel van de volgende paragraaf: er volgen nieuwe bewijzen van de stellingen waarmee de auteurs dit boekje begonnen zijn. Er volgt een stevige portie getaltheorie (Fermat-getallen, het GGD-algoritme van Euclides en priemfactorisering) waarvan ik denk dat die voor lang niet al mijn leerlingen weggelegd zal zijn.

Het hoofdstuk sluit af met voorbeelden waaruit blijkt dat een fout bewijs geen bewijs is, en hoe gemakkelijk je de fout kunt ingaan bij redeneringen. Leuke voorbeelden om met je leerlingen te delen en om te illustreren dat je bij het vertrouwen op inzicht heel voorzichtig moet zijn.

Geschiedenis van de axiomatische methode

De titel van dit hoofdstuk spreekt voor zich. Euclides' axiomatische presentatie van de meetkunde wordt hier nog eens helder en beknopt uiteengezet.

Te lezen is hoe de Italiaanse priester Saccheri (1667-1733) probeerde het vijfde postulaat (het parallellenpostulaat) van Euclides te bewijzen volgens de strategie 'bewijs door contradictie'. Details zijn te vinden op de website[1] bij dit boek. Namen als Gauss, Bolyai en Lobatsjevski volgen. Allen ontwikkelden onafhankelijk van elkaar een nieuw soort meetkunde: de niet-Euclidische meetkunde. Er volgen enkele opdrachten om zelf te ervaren hoe je deze niet-Euclidische meetkunde kunt bedrijven in het Klein-Beltrami-model en het Riemann-model. De opdrachten worden ondersteund met applets. Voor leerlingen die niet eerder in aanraking zijn geweest met niet-Euclidische meetkunde, zal dit een ware eye-opener zijn.

Redeneren over oneindigheid

Om over oneindigheid te kunnen redeneren, beginnen de auteurs dit hoofdstuk met het uitleggen van de begrippen injectie, surjectie en bijectie.

Er volgen enkele opdrachten om deze begrippen 'eigen' te maken. Vervolgens bespreken de auteurs voorbeelden van verzamelingen die oneindig, eindig, aftelbaar oneindig en overaftelbaar zijn. Sommige voorbeelden, zoals het Hilbert-hotel (zie figuur 2 op pag. 170), spreken aan en zijn goed te volgen. Andere voorbeelden vragen veel van het doorzettingsvermogen van de lezer en bij de stelling van Cantor-Schroeder-Bernstein ben ik afgehaakt.

Recepten voor bewijsconstructie

In hoofdstuk 5 wordt overzichtelijk maar behoorlijk abstract uiteengezet welke verschillende bewijs-structuren er zijn en hoe deze in elkaar zitten. De verschillende beweringen (implicatie, conjunctie, equivalentie, negatie, contradictie, disjunctie, universele bewering, existentiebewering) en hun logische vorm (symbolen) passeren de revue en zullen een aha-erlebnis zijn voor iedere wiskundige. Voor een scholier verwacht ik dat dit hoofdstuk veel te kort door de bocht gaat.

Bewijzen vinden en bewijzen verifiëren

In dit hoofdstuk wordt duidelijk gemaakt dat er een verschil is tussen het vinden en het verifiëren van een bewijs. Vinden van bewijzen heeft te maken met creativiteit en het doen ontstaan van inzichten, en is hierdoor aanzienlijk moeilijker dan nagaan of een bewijs klopt. Ik vind het persoonlijk erg leuk dat de schrijvers gebruik maken van de heuristieken van Georg Pólya om aan te geven hoe je te werk kunt gaan bij het vinden van een bewijs. Het hoofdstuk sluit af met een paragraaf over bewijsverificatie met de computer.

Laatste hoofdstukken

Aan het eind van het boekje vinden we enkele mooie afbeeldingen en beknopte biografieën van wiskundigen die in de verschillende hoofdstukken zijn besproken. Er volgen nog enkele tips van de auteurs over lopende projecten, uitwerkingen van de opdrachten en interessante literatuur.

Conclusie

De opzet van de reeks 'Exact in context' is dat de boekjes op vele manieren en op verschillende niveaus te gebruiken zijn; de stof wordt door de auteurs geschikt bevonden voor zowel de vierde en vijfde klas havo als voor de laatste drie klassen van het vwo, voor klassikale behandeling én voor zelfstudie, voor vrijblijvende kennismaking of voor integrale bestudering en toetsing door middel van vragen en opdrachten op verschillende niveaus.
Na het lezen van dit tweede deel uit de serie ben ik van mening dat dit boekje zeker een plaatsje verdient in de schoolmediatheek en in mijn eigen boekenkast: er zijn me enkele mooie voorbeelden bijgebleven die ik vast nog eens ter sprake breng in een van mijn wiskunde B2 lessen in het vwo, en ook mijn eigen wiskundige kennis is weer wat op peil gebracht. Toch heb ik niet de illusie dit boekje te kunnen integreren in de praktijk van mijn wiskundelessen van alledag. Ik heb na lezen van 'Inzien en bewijzen' weer eens ingezien dat dit soort wiskunde niet voor iedereen is weggelegd...

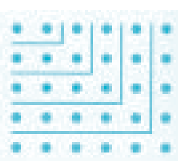
Noot

[1] Elektronische ondersteuning is te vinden op internet via www.cwi.nl/~jve/qed/

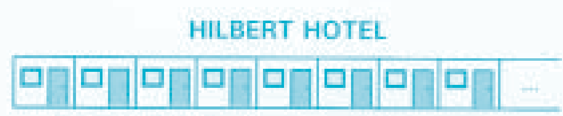
Over de recensent

Jacolien van Dijk is werkzaam als wiskundedocent aan het Griftland College te Soest.
E-mailadres: jacolienvandijk@hccnet.nl

FIGUUR 1


Opdracht 2.5 Kun je uit het plaatje hiernaast van 2 + 4 + 6 + 8 + 10 (de som van de eerste 5 even natuurlijke getallen) een formule destilleren voor de som van de eerste n even natuurlijke getallen? (Ook dit voorbeeld zou je je nog moeten herinneren uit de wiskundelessen.)

FIGUUR 2

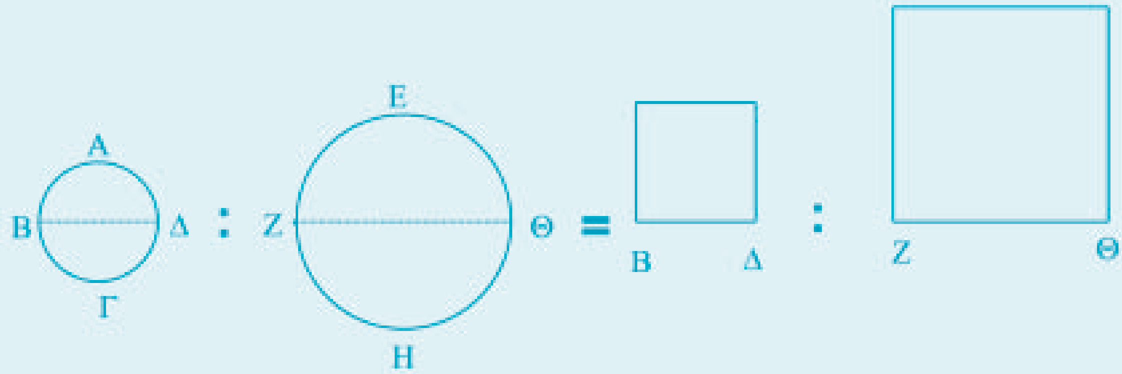


Figuur 4.5 Het Hilbert Hotel, met oneindig veel kamers.

Opdracht 4.6 Op een goede dag is het Hilbert Hotel volledig bezet. Dan arriveert er een late gast. Na enig nadenken slaagt de manager erin om deze nieuwe gast onder te brengen. Hoe?

LEES EUCLIDES!

[Jan Hogendijk]



FIGUUR 1

Inleiding

Het tijdschrift *Euclides* is genoemd naar een Griekse wiskundige die omstreeks 300 voor Christus in Alexandrië in het noorden van Egypte verbleef. Zijn hoofdwerk, de *Elementen*, was tot in de negentiende eeuw na Christus een belangrijk leerboek. De *Elementen* behoren, samen met de Torah en de Veda's, tot een selecte groep teksten die meer dan twee millennia lang zijn bestudeerd!

De *Elementen* is geen boek voor beginners of voor de praktijk. Euclides presenteert de wiskunde als een intellectueel bouwwerk van tijdloze en immateriële definities, axioma's, stellingen en bewijzen. Zijn boek is het resultaat van twee eeuwen discussies op hoog niveau over wat wiskunde is en hoe je het moet doen.

We geven hier geen inhoudsoverzicht van de dertien 'boeken' (eigenlijk grote hoofdstukken) van de *Elementen*, en ook geen opsomming van verschillen met de moderne wiskunde. Daarover is al veel geschreven, ook in het Nederlands. In plaats daarvan zullen we het bewijs van één stelling uit de *Elementen* bespreken, te weten stelling 2 van Boek 12. Deze stelling is uitgezocht om een idee te geven van de diepte van de *Elementen* van Euclides. Hieronder geven we een samenvatting en commentaar. Wie wil weten wat Euclides precies gezegd heeft, kan een letterlijke Nederlandse vertaling van de Griekse tekst vinden op [1]. We hopen hiermee de lezer of lezeres nieuwsgierig te maken naar de rest van de *Elementen*!

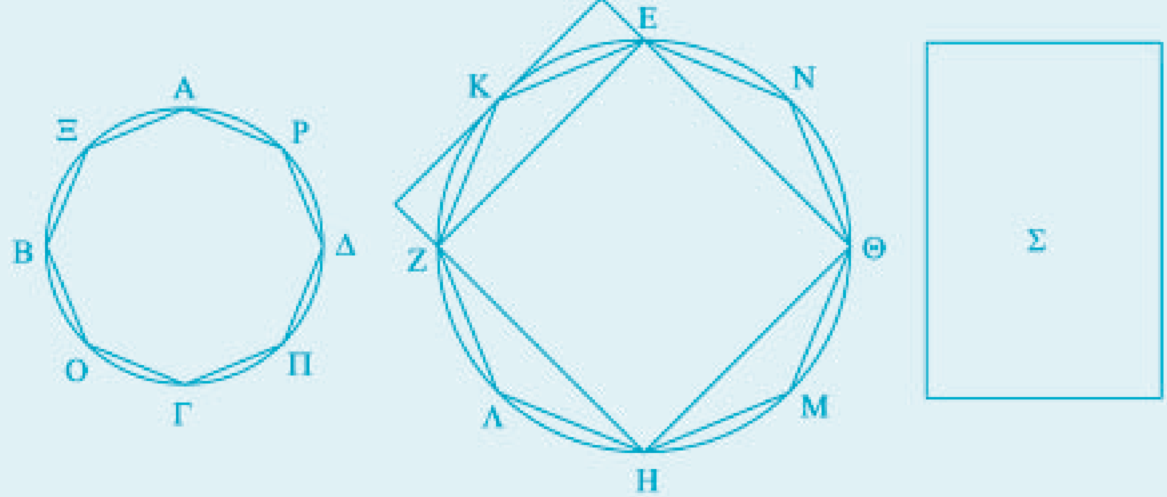
Stelling 2 van Boek 12

Wanneer Euclides 'cirkel' of 'veelhoek' zegt, bedoelt hij vaak wat wij zouden weergeven als *oppervlakte* van de cirkel, of oppervlakte van de veelhoek. Euclides had niet het moderne begrip van reëel getal. Voor hem *had* een cirkel of veelhoek geen oppervlakte, maar een cirkel of veelhoek *was* een oppervlakte, en dat was geen getal maar een speciaal soort grootheid. Grootheden van dezelfde soort konden bij elkaar worden opgeteld, van elkaar worden afgetrokken, en met elkaar worden vergeleken, maar niet met elkaar worden vermenigvuldigd. In de rest van dit stuk zullen we af en toe dit spraakgebruik van Euclides volgen.

In stelling 2 van Boek 12 bewijst Euclides dat twee cirkels dezelfde verhouding hebben als de vierkanten van hun middellijnen. In moderne notatie betekent dit dat de oppervlakte van een cirkel met middellijn d gelijk is aan cd^2 voor een constante c (modern $c = \frac{\pi}{4}$). Tegenwoordig zou dit resultaat met integraalrekening worden bewezen. We geven het bewijs van Euclides in ietwat gemoderniseerde notatie, maar voor de punten in de figuur gebruiken we precies dezelfde Griekse letters als Euclides. Het doel van dit artikel is immers dat de lezer of lezeres de grondtekst gaat lezen!

Euclides bekijkt twee cirkels $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ en $\mathrm{EZH\Theta}$ met middellijnen $\mathrm{B\Delta}$ en $\mathrm{Z\Theta}$. Hij wil bewijzen dat de cirkel met middellijn $\mathrm{B\Delta}$ zich verhoudt tot de cirkel met middellijn $\mathrm{Z\Theta}$ als het vierkant met zijde $\mathrm{B\Delta}$ tot het vierkant met zijde $\mathrm{Z\Theta}$ (zie figuur 1).

We beginnen met een kleine toelichting vooraf. Euclides construeert straks (met passer en liniaal) een rij regelmatige n-hoeken in de beide cirkels, met n = 4, 8, ... In stelling 1 van Boek 12 heeft hij al bewezen dat (de oppervlaktes van) die n-hoeken zich verhouden als (de oppervlaktes van) de vierkanten met zijden $\mathrm{B\Delta}$ en $\mathrm{Z\Theta}$. Het bewijs volgt gemakkelijk uit de stof van de eerdere Boeken, en we zullen het daarom niet bespreken. (Stelling 1 is modern in te zien door de n-hoek in n taartpunten te verdelen vanuit het middelpunt; elke taartpunt heeft oppervlakte d^2 maal $\frac{1}{8}\sin\frac{2\pi}{n}$ waarbij d de middellijn van de cirkel is.) In de vijfde eeuw voor Christus had de wiskundige Antiphon de cirkel ook al benaderd met een rij regelmatige n-hoeken. Hij nam aan dat als n heel groot wordt, de n-hoek op den duur met de cirkel zal samenvallen. Omdat de n-hoeken in de beide cirkels zich als de



FIGUUR 2

vierkanten met zijden $\mathrm{B\Delta}$ en $\mathrm{Z\Theta}$ verhouden, zouden we stelling 2 van Boek 12 nu simpelweg kunnen afleiden door *n* heel groot te laten worden. In de eeuw na Antiphon begonnen bezwaren te ontstaan tegen dit soort softe redeneringen. Euclides' bewijs is dan ook veel strenger.

Het bewijs van Euclides

We zullen (de oppervlaktes van) $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ en $\mathrm{EZH\Theta}$ noteren als *C* en *C'*, en (die van) de vierkanten met zijden $\mathrm{B\Delta}$ en $\mathrm{Z\Theta}$ als $\mathrm{B\Delta}^2$ en $\mathrm{Z\Theta}^2$. Euclides wil bewijzen dat $C:C'=\mathrm{B\Delta}^2:\mathrm{Z\Theta}^2$ (zie figuur 2).
Hij stelt eerst dat dit niet waar is. Als niet geldt $\mathrm{B\Delta}^2:\mathrm{Z\Theta}^2=C:C'$; dan moet, zo redeneert Euclides, $\mathrm{B\Delta}^2:\mathrm{Z\Theta}^2=C:\Sigma$ voor een zekere figuur Σ die niet gelijk is aan (niet dezelfde oppervlakte heeft als) *C'*. Hij tekent Σ als een rechthoek. Nu onderscheidt hij twee gevallen.

Geval 1: stel $C'>\Sigma$.
Dan is het verschil $C'-\Sigma$ een (positieve) oppervlakte (die wij ε zullen noemen).
Euclides wil nu in cirkel $\mathrm{EZH\Theta}$ een *n*-hoek construeren die groter is dan Σ.
Hij beschrijft eerst met passer en liniaal vierkant $V_4=\mathrm{EZH\Theta}$ in de cirkel, en hij merkt op dat $V_4>\frac{1}{2}C'$ omdat V_4 de helft is van het omgeschreven vierkant, dat zeker groter is dan *C*'. Als $V_4>\Sigma$, is hij klaar. Zo niet, dan construeert hij, door de bogen $\mathrm{EZ, ZH,}\ldots$ met passer en liniaal te halveren, de regelmatige achthoek $V_8=\mathrm{EKZ\Lambda HM\Theta N}$.
Hij bekijkt in de achthoek twee zijden met hoekpunt K en tekent de rechthoek gevormd door *EZ*, de raaklijn in K en de verlengdes van HZ en $\mathrm{\Theta E}$. Nu is driehoek ZKE de helft van de rechthoek, en deze is groter dan het cirkelsegment ZKE. Door dezelfde redenering op N, M, en Λ toe te passen en op te tellen, volgt $(V_8-V_4)>\frac{1}{2}(C'-V_4)$
We kunnen op dezelfde manier verdergaan en de regelmatige zestienhoek V_{16} construeren. Dan blijkt $(V_{16}-V_8)>\frac{1}{2}(C'-V_8)$
Algemeen krijgen we $(V_{2n}-V_n)>\frac{1}{2}(C'-V_n)$. Euclides tekent de figuur voor *n* = 4 maar zijn redenering is algemeen.
We hebben dus een grootheid *C*', waar we meer dan de helft van afnemen. En van de rest (*C*' - V_4) halen we ook meer dan de helft af. Van wat daarna overblijft, namelijk (*C*' – V_8), halen we ook meer dan de helft af, en zo gaan we steeds door. Met behulp van Stelling 1 van Boek 10 leidt Euclides af dat we uiteindelijk een restje overhouden dat kleiner is dan ε. Zijn redenering is als volgt.
Omdat *C*' en ε grootheden van dezelfde soort zijn (namelijk oppervlakten), neemt Euclides aan dat er een veelvoud $p\varepsilon$ bestaat met $p\varepsilon>C'$. Dit veelvoud krijgen we door ε een bepaald aantal (*p* – 1) maal bij zichzelf op te tellen. Stel dat we meer dan de helft van *C*' afhalen, en van de rest weer meer dan de helft, en dit totaal *p* keer doen, en daarna een laatste restje overhouden. Dan hebben we *C*' in *p* delen verdeeld, en van deze delen is het laatste restje het kleinste, en daarom zeker kleiner dan het *p*-de deel van *C*'. Dit restje is dan ook kleiner dan ε.
Nu terug naar Boek 12. Er is dus een veelhoek V_n met *n* een macht van 2, zodat $C'-V_n<\varepsilon$. Dan is $V_n>\Sigma$ **(*)**.
In de cirkel met diameter $\mathrm{B\Delta}$ construeert Euclides nu (met passer en liniaal) een regelmatige *n*-hoek W_n met *n* zijden; uiteraard geldt W_n < *C*.
Uit stelling 1 van Boek 12 volgt: $\mathrm{B\Delta}^2:\mathrm{Z\Theta}^2=W_n:V_n$.
Maar we hadden aangenomen $\mathrm{B\Delta}^2:\mathrm{Z\Theta}^2=C:\Sigma$.
Dus $C:\Sigma=W_n:V_n$. Omdat *C* > W_n volgt nu $\Sigma>V_n$.
Tegenspraak met (*). De aanname van geval 1 kan dus niet waar zijn.

Geval 2: stel nu dat $\Sigma>C'$.
Dan moet $\mathrm{Z\Theta}^2:\mathrm{B\Delta}^2=\Sigma:C=C':\Sigma'$ voor een figuur $\Sigma'<C$, en we zijn terug bij geval 1. Dus ook de aanname van geval 2 kan niet waar zijn. De enig

mogelijke conclusie is dus $B\Delta^2 : Z\Theta^2 = C : C'$, q.e.d. Merk op dat het begrip oneindig in het bewijs niet voorkomt!

En verder?

In de tweede helft van de negentiende eeuw werd de draad van Euclides en de andere oude Grieken weer opgepakt, en ontstond het moderne limietbegrip. $\lim_{n\to\infty} V_n = C'$ betekent modern: voor elke $\varepsilon > 0$ is er een N in de natuurlijke getallen zodat voor $n > N$ geldt $|C' - V_n| < \varepsilon$. Het verband met Euclides is duidelijk; een verschil is dat de 'grootheden' van Euclides vervangen zijn door reële getallen.
In de rest van Boek 12 behandelt Euclides op soortgelijke manier de (inhouden van de) piramide en de kegel, en hij bewijst dat bollen dezelfde verhouding hebben als de kubussen van de middellijnen. Vooral voor de bollen moet hij harder werken dan in het relatief eenvoudige bewijs dat wij gezien hebben.
Wie dit in de grondtekst naleest, krijgt ontzag voor de Griekse wiskundigen! Een halve eeuw na Euclides drukte Archimedes de oppervlakte van de cirkel en de oppervlakte en inhoud van de bol uit met behulp van de omtrek van de cirkel, en hij bewees dat de verhouding tussen omtrek en middellijn van de cirkel, die wij met π weergeven, tussen $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{1}{7}$ ligt.

Euclides en de kunst van het bewijzen

De Romeinen hadden geen belangstelling voor de bewijzen van Euclides en Archimedes. In de negende eeuw na Christus werd de *Elementen* uit het Grieks in het Arabisch vertaald, en pas in de twaalfde eeuw uit het Arabisch in het Latijn. Euclides heeft wiskundigen in drie culturen, de Griekse, de Islamitische en de middeleeuws Europese, onderwezen in de kunst van het bewijzen. Zijn werk heeft in West-Europa de ontwikkeling van de wiskunde bepaald. Ook de wiskundigen die in het Arabisch schreven, hadden groot ontzag voor Euclides, en verbasterden zijn naam soms tot *iqlîd*, 'sleutel'.

Noot

[1] www.math.uu.nl/people/hogend/gw/Elementen12-2.pdf

Literatuur

- Griekse grondtekst: Euclidis Elementa, ed. et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, Leipzig: Teubner, 1883-1888. 5 delen. (Herdrukt in 1967 door E.S. Stamatis.)
- Engelse vertaling: T.L. Heath, Euclid: The Thirteen Books of the Elements, Cambridge: University Press, 1921; vele malen herdrukt als Dover reprint. Op het internet te vinden met Java applets in http://aleph0.clarku.edu/djoyce/java/elements/elements.html
- Nederlandse bespreking: E.J. Dijksterhuis, De Elementen van Euclides, Groningen: Noordhoff, 1930-1932, 2 delen.

Nederlandstalige websites over Euclides

(ook interessant voor leerlingen)
- www.math.rug.nl/didactiek/Euclides/Euclides.htm (Jan van Maanen);
- www.pandd.demon.nl/elementen.htm (Dick Klingens);
- www.nvvw.nl/tn_euclides.htm ('Terug naar Euclides', artikel van Dirk van Delft in de NRC).

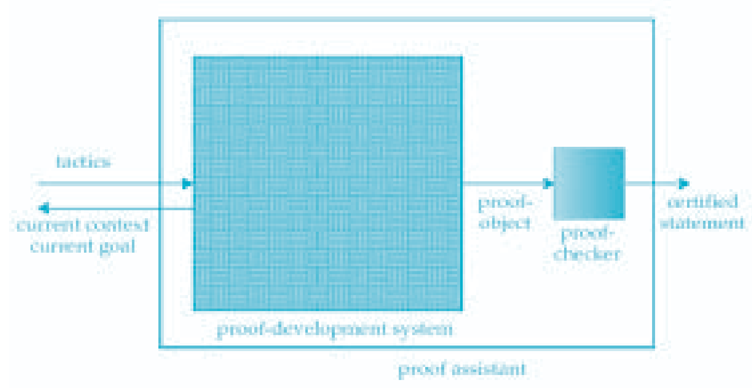
Over de auteur

Jan Hogendijk werkt als hoogleraar geschiedenis van de wiskunde in Utrecht, Leiden en Dhahran (Saoedi-Arabië). Hij reist ook regelmatig naar Iran.
E-mailadres: hogend@math.uu.nl
URL: www.math.uu.nl/people/hogend

Verschenen/ Wiskundelessen met TI Interactive

Auteur: Docentennetwerk TI Interactive Nederland   Uitgever: APS, Utrecht, 2005   Prijs: € 19,50

Sinds 1997 voert het APS het project T^3 uit, 'Teachers Teaching with Technology'. In dat kader is destijds een docentennetwerk rond het pakket *TI Interactive* van start gegaan. Bovenstaand boekje is een product van dit docentennetwerk. Het bevat lesmateriaal waarbij computeralgebra als gereedschap ingezet wordt. De beschreven lessen zijn vooral bestemd voor de tweede fase van havo en vwo, en dan met name voor de bètaprofielen. De bijgeleverde cd-rom bevat, naast het lesmateriaal uit het boek, ook uitwerkingen van opdrachten.
Te bestellen via *www.aps.nl* of telefonisch bij BDC, Meppel (05222-37555); bestelnummer 400.160.



BEWIJZEN: ROMANTISCH OF COOL?

Computers kunnen ons helpen wiskunde te doen door voor ons te rekenen, met getallen of symbolisch. Er worden nu ook computersystemen ontwikkeld, de zogenaamde wiskundige assistenten, die ons zelfs kunnen helpen met het verifiëren en verder ontwikkelen van het vak. Het menselijke vernuft zal hierdoor niet overbodig worden.

[Henk Barendregt en Freek Wiedijk]

```
theorem
  ex x, y st x is irrational & y is irrational & x^y is rational
proof
  set w = sqrt 2;
  w > 0 by SQUARE_1:84;
  then A1: (w^w)^w = w^(w*w) by POWER:38
    .= w^(w^2) by SQUARE_1:def 3
    .= w^(2) by SQUARE_1:def 4
    .= w^2 by POWER:53
    .= 2 by SQUARE_1:def 4;
  per cases;
  suppose A2: w^w is rational;
    take w, w;
    thus thesis by A2,IRRAT_1:1,INT_2:44;
  end;
  suppose A3: w^w is irrational;
    take w^w, w;
    thus thesis by A1,A3,IRRAT_1:1,INT_2:44;
  end;
end;
```

POWER:38	a > 0 implies a to power b to power c = a to power (b * c);
POWER:53	a to power 2 = a^2;
SQUARE 1:84	1 < sqrt 2;
SQUARE 1:def 3	x^2 = x * x;
SQUARE 1:def 4	0 <= a implies 0 <= sqrt a & (sqrt a)^2 = a;
INT 2:44	2 is prime;
IRRAT 1:1	p is prime implies sqrt p is irrational;

FIGUUR 1 **FIGUUR 2**

1. De 'wis' van wiskunde

Eigenwijs? Dat wordt er wel over je beweerd als je van wiskunde houdt. Het onderwerp houdt zich bezig met die dingen waarvan je zeker kunt zijn. In andere talen heet het vak *mathematics, mathématiques, matématica,* ... Het Nederlands heeft een heel ander woord, hoewel 'mathesis' vroeger ook wel gebruikt werd. De stam 'wis' is verwant aan 'zeker', aan 'weten'. En ja, het kan eigenwijs overkomen als je je bezighoudt met deze zaken. Maar je weet ook wel dat alleen sommige dingen zeker zijn: het weer kunnen we niet op de lange termijn voorspellen. Maar dat weten we dan ook weer zeker. Trouwens, wat de zekerheid betreft die de wiskunde je geeft, het gaat er niet om gelijk te krijgen, maar om gelijk te hebben!
Waar komt die zekerheid nu vandaan? Die is het gevolg van het bewijzen. Een uitspraak wordt onderzocht op al zijn mogelijke aspecten. En als dat er oneindig veel zouden zijn, dan worden er methoden ingevoerd om binnen eindige tijd al die oneindig vele gevallen te kunnen behandelen: symbolisch redeneren ('met x en y') en inductie (een uitspraak is waar voor alle natuurlijke getallen als die waar is voor 0 en als de waarheid voor x die voor $x + 1$ tot gevolg heeft). Dat geeft de precisie, kracht en zekerheid van de wiskunde die haar zo mooi (en voor sommigen: onuitstaanbaar) maakt.
Waarom geven bewijzen zekerheid? Dat komt omdat je alleen uitgaat van de definities, van wat er gegeven[1] is, en dan op grond van een sluitende redenering een conclusie trekt. Blijft de vraag wat een sluitende redenering is. Tijdens een werkcollege vragen studenten vaak: 'Mag ik deze stap maken?' Het antwoord van de docent is dan: 'Als je in de eerste plaats jezelf en daarna mij ervan kunt overtuigen dat deze juist is.' Het uiteindelijke oordeel van de logische en daarmee wiskundige correctheid hangt af van een mentaal oordeel. Maar het bijbehorende oordeelsvermogen moet wel getraind worden!
Nu kan het voorkomen dat een bewijs zeer lang is. Onze geest kan dan moe worden bij de verificatie ervan en zo kunnen er foutjes binnen sluipen. Stellingen met lange -en ook extreem lange- bewijzen komen voor. Je kunt zelfs aantonen dat er altijd nieuwe stellingen zullen zijn met alleen extreem lange bewijzen (en een relatief korte formulering). Dit treedt onder andere, maar niet uitsluitend, op als lange berekeningen onderdeel vormen van het bewijs, zoals bij de vierkleurenstelling. Om deze redenen heeft de Nederlandse wiskundige Dick de Bruijn (geboren 1918) een taal *Automath* ontwikkeld waarin een bewijs zodanig in stapjes uitgesplitst kan worden dat een computer met een eenvoudig programma het kan verifiëren op fouten en foutjes; zie [10]. Wij hoeven slechts éénmaal na te gaan of het computerprogramma correct is (het uiteindelijke menselijke oordeel blijft) en dan kunnen we op deze manier de hoogst mogelijke graad van zekerheid verkrijgen. Wel moeten de bewijzen dan *geformaliseerd* worden, dat wil zeggen van alle mogelijke details voorzien worden klaar voor de verificatie door de computer. Op interactieve wijze, door samenwerking tussen wiskundige en computer

```
----------------------- Input -----------------------
set(auto).
op(300, xfy, ^).
formula_list(usable).
all x (x*x = x^2).
all x (sqrt(x)^2 = x).
all x y z ((x^y)^z = x^ (y*z)).
-rational(sqrt(2)).
rational(2).
end_of_list.
formula_list(sos).
-(exists x y (-rational(x) & -rational(y) & rational(x^y))).
end_of_list.
----------------------- PROOF -----------------------
1 [] -rational(sqrt(2)).
2 [] rational(x)|rational(y)| -rational(x^y).
3 [factor,2.1.2] rational(x)| -rational(x^x).
4 [] x*x=x^2.
6,5 [copy,4,flip.1] x^2=x*x.
7 [] sqrt(x)^2=x.
8 [copy,7,demod,6] sqrt(x)*sqrt(x)=x.
10 [] (x^y)^z=x^ (y*z).
12 [] rational(2).
22 [para_from,10.1.1,2.3.1]
        rational(x^y)|rational(z)| -rational(x^ (y*z)).
58 [para_into,22.3.1.2,8.1.1]
        rational(x^sqrt(y))|rational(sqrt(y))| -rational(x^y).
67 [para_into,58.3.1,5.1.1,unit_del,1]
        rational(x^sqrt(2))| -rational(x*x).
84 [para_into,67.2.1,8.1.1] rational(sqrt(x)^sqrt(2))| -rational(x).
91 [hyper,84,12] rational(sqrt(2)^sqrt(2)).
96 [hyper,91,3] rational(sqrt(2)).
97 [binary,96.1,1.1] $F.
----------------------- end of proof -----------------------
```

FIGUUR 3

komen volledig geformaliseerde bewijzen tot stand en worden ze nagekeken. Op deze wijze resulteert wat we noemen *Computer Wiskunde*. We geven twee voorbeelden.

2. Het bestaan van positieve irrationale getallen met rationale macht

We geven nu een stelling en een bewijs daarvan. De uitspraak is op zichzelf niet erg interessant, maar er moet een beetje geredeneerd en gerekend worden en dat illustreert de methode van bewijsverificatie.
Een reëel getal r heet rationaal als het een breuk is, dus als $r = \frac{p}{q}$ voor zekere gehele getallen p, q. Anders heet het irrationaal.

Een romantisch bewijs

Stelling. Er bestaan positieve irrationale getallen x en y zodat hun macht x^y rationaal is.
In symbolen: $\exists x, y \in (\mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{Q})[x^y \in \mathbb{Q}]$.

Bewijs. We weten dat $\sqrt{2} \in (\mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{Q})$.

Geval 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. Dan zijn we klaar: neem $x = y = \sqrt{2}$.

Geval 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$. Neem dan $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ en $y = \sqrt{2}$.

Dan zijn $x, y \in (\mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{Q})$ en

$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q} \qquad \square$$

Er valt hier iets op. Hoewel we niet weten of $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationaal is of niet, konden we toch inzien dat de stelling juist is. Als iemand ons dan vraagt: 'Geef die getallen x en y dan eens', dan kunnen we dat niet voor x. Dit komt omdat het bewijs niet *intuïtionistisch* geldig is. Met behulp van intuïtionistische logica kun je alleen existentie-uitspraken bewijzen als je ook daadwerkelijk voorbeelden kunt geven. Met meer moeite kan er toch een intuïtionistisch bewijs gegeven worden. Er is de stelling van Gelfond-Schneider,

die impliceert dat $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$. Dat kan intuïtionistisch bewezen worden en zo hebben we dan wel een concreet voorbeeld voor bovenstaande stelling:

$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

Het bewijs van de stelling —we beperken ons tot de klassieke (niet-intuïtionistische) versie— is geheel duidelijk. We noemen het een 'romantisch' bewijs: begrijpelijk voor de menselijke geest.

Bewijzen via de computer: eerste poging

We kunnen proberen het bewijs van de stelling met behulp van een computer te leveren.

Numerieke berekeningen (GP/PARI calculator)
Een goed numeriek programma zal niet blijken te helpen.

```
? sqrt(2)
%1 = 1.414213562373095048801688724
? %1^%1
```

```
theorem
  the_gold_inscription = is_not portrait_in_gold_casket &
  the_silver_3nscription =
    exactly_one_holds_of (the_gold_inscription,the_silver_inscription)
  implies
    portrait_in_gold_casket is_true
proof
assume that
    A1: the_gold_inscription = is_not portrait_in_gold_casket and
    A2: the_silver_inscription =
      exactly_one_holds_of (the_gold_inscription,the_silver_inscription);
::[in order to prove]
    the_gold_inscription is_false
proof
per cases;
suppose
    A3: the_silver_inscription is_true;
then
    exactly_one_holds_of (the_gold_inscription,the_silver_inscription) is_true
by A2; then
    the_gold_inscription is_true & the_silver_inscription is_false or
    the_gold_inscription is_false & the_silver_inscription is_true
by exactly_one; hence
    the_gold_inscription is_false
by A3; end;
suppose
    A4: the_silver_inscription is_false;
then
    exactly_one_holds_of (the_gold_inscription,the_silver_inscription) is_false
by A2; then
    the_gold_inscription is_true & the_silver_inscription is_true or
    the_gold_inscription is_false & the_silver_inscription is_false
by exactly_one; hence
    the_gold_inscription is_false by A4;
end;
end;
::[in both cases we have the_gold_inscription is_false]
then
    (is_not portrait_in_gold_casket) is_false
by A1; hence
    portrait_in_gold_casket is_true
by is_not_iff_not;
end;
```

FIGUUR 4

```
%2 = 1.63252691943815284477349538 1
? %2^%1
%3 = 1.9999999999999999999999999999
```

Ook al zou het antwoord %3 = 2.00000000000 0000000000000000 zijn, dan kunnen we nog niet concluderen dat dit getal rationaal is. En verder is natuurlijk helemaal niet duidelijk dat er bij %1 en %2 irrationale getallen staan.

Computeralgebra (Mathematica)
Met behulp van 'symbolisch rekenen' kunnen we iets meer. Een systeem dat dit kan, rekent $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ exact uit.

```
In[1] := (Sqrt[2]^Sqrt[2])^Sqrt[2]
Out[1]= 2
```

We zouden het systeem kunnen leren dat $\frac{p}{q}$ en dus ook 2 rationaal is. Maar weer kan er zelfs niet uitgedrukt worden dat bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ irrationaal is.

Bewijzen via de computer: cool

Alleen al het formuleren op een computer van onze stelling mislukte boven. Een numeriek programma kan wel 3.7 - 1.8 = 1.9 uitrekenen, maar niet $r - r$ als we niet vertellen wat r is en daar dan 0 uit laten komen. In een programma voor symbolisch rekenen kan dit laatste wel. Maar in zulke systemen kunnen we weer geen eigenschappen zoals rationaliteit of de ontkenning daarvan weergeven.

Interactieve bewijsverificatie (Mizar)
Het systeem Mizar van Trybulec (Białystok, Polen, in ontwikkeling sinds 1974), dat geïnspireerd is door het werk van de Bruijn, kan wel alle mogelijke wiskundige uitspraken doen. Dat komt omdat de logica (en eveneens de verzamelingenleer) is ingebouwd in dit systeem. Bewijzen zullen door de gebruiker moeten worden ingevoerd, waarna ze volledig geverifieerd worden (zie figuur 1). Gebruik wordt gemaakt van reeds eerder geverifieerde stellingen (zie figuur 2). De bibliotheek van het systeem Mizar is behoorlijk groot. Zo'n 50.000 stellingen zijn er geformaliseerd en goed bevonden. Voorbeelden zijn de hoofdstelling van de algebra (ieder polynoom in $\mathbb{C}$ heeft een wortel in $\mathbb{C}$), de hoofdstelling van de analyse (differentiëren van de integraal van een continue functie f levert f zelf op) en de dekpuntstelling van Brouwer (een continue functie van een bol naar zichzelf heeft altijd een punt dat op zijn plaats blijft).

Automatische deductie (Otter)
In tegenstelling tot Mizar zoekt het systeem Otter, ontwikkeld door McCune (Argonne, Illinois, in ontwikkeling sinds 1988), zelf naar bewijzen. Je moet dan wel een handje helpen en bijvoorbeeld voorzeggen dat $\sqrt{2}$ irrationaal is. Omdat onze stelling vrij eenvoudig is, kan het bewijs verder door Otter zelf gevonden worden. In het algemeen duurt het te lang om een computer naar bewijzen te laten zoeken. Voor bovenstaande bewering —en met menselijke hulp— kan dat dus wel. Het systeem Otter werkt met

Portia

(met toestemming overgenomen van www.collectorsprints.com)

de zogenaamde eerste orde predicatenlogica. Naast termen zoals x, y, xy, x^y, ... en gelijkheden zoals $(x^y)^z = x^{yz}$ die ook al gebruikt worden in systemen voor computeralgebra, heb je nu ook een weergave voor de zogenaamde kwantoren 'er is een x' en 'voor alle x'. De manier waarop naar een bewijs gezocht wordt is de zogenaamde *resolutiemethode*, een bepaald soort bewijs uit het ongerijmde. Het gegenereerde bewijs is meestal niet begrijpelijk; zie het voorbeeld in figuur 3.

Op een geheel andere manier, op grond van een door Collins (zie [9]) en anderen verbeterd algoritme van Tarski (zie [12]) dat gebruikt maakt van logische manipulaties die met name gelden voor bepaalde structuren, kunnen bewijzen voor uitspraken uit de Euclidische meetkunde automatisch gegenereerd worden, tenzij het systeem aangeeft dat de uitspraak onjuist is. De efficiëntie van het algoritme is matig en voor een overlappende verzameling van problemen is er het snellere algoritme van Buchberger (zie [7]) en de methode van Wu (zie [8]).

3. Hoe win je de hand van Portia?

Vrij naar het toneelstuk 'De Koopman van Venetië' van Shakespeare heeft Smullyan (zie [11]) de volgende puzzel verzonnen.

De huwbare Portia heeft een gouden en een zilveren kistje. Zij kiest haar toekomstige echtgenoot niet op grond van zijn kracht uit, maar op grond van zijn intelligentie. In een van de kistjes plaatst ze een portret van haarzelf. Ze sluit de kistjes. Op het gouden kistje staat te lezen: 'Het portret zit niet in dit kistje.' Op het zilveren kistje staat: 'Precies één van deze twee uitspraken is waar.'
Aan iedere man die naar haar hand dingt legt Portia uit dat de uitspraken waar of onwaar kunnen zijn, maar dat zij met hem zal trouwen als hij het kistje weet uit te kiezen waar haar portret in zit.
Het probleem is nu om gebruik te maken van de inscripties, zonder dat je weet of ze al dan niet waar zijn. De romantische oplossing is als volgt. Stel de uitspraak op het zilveren kistje is waar. Dan is die op het gouden kistje onwaar en dus zit het portret in dat kistje. Stel de uitspraak op het zilveren kistje is onwaar, dan moet die op het gouden kistje ook onwaar zijn. Wederom zit het portret in het gouden kistje. De slimme man wijst dus het gouden kistje aan (als hij haar tenminste wil trouwen).

Interactieve bewijsverificatie (Mizar)
Zie figuur 4.
Het probleem heeft een logische kronkel. Een van de uitspraken verwijst naar zichzelf. In het algemeen leidt dat tot paradoxen ('Deze uitspraak is onwaar'), maar in dit geval is dat niet zo. In de technologie van computergeformaliseerd bewijzen wordt vaak gebruik gemaakt van een inzichtelijk betrouwbare vorm van deze zogenaamde *reflectie*, verwant aan dit voorbeeld, waarbij wiskundige uitspraken onderwerp worden van andere uitspraken. Een voorbeeld van reflectie is het dualiteitsprincipe uit de projectieve meetkunde: 'Een stelling blijft geldig wanneer de begrippen punt en lijn systematisch verwisseld worden.' Dit is een stelling over stellingen, verkregen uit reflectie over de axioma's van de projectieve meetkunde.

4. State of the art

We noemen een paar systemen die momenteel gebruikt worden. Mizar (Pools), Coq (Frans), HOL (Engels), Isabelle (Engels/Duits) en PVS (Amerikaans). Zie respectievelijk de volgende web-sites:
- *www.mizar.org*
- *http://pauillac.inria.fr/coq/*
- *www.cl.cam.ac.uk/users/jrh/hol-light/*
- *www.cl.cam.ac.uk/Research/HVG/Isabelle/*
- *http://pvs.csl.sri.com*

Andere relevante websites voor Computer Wiskunde (onder meer over Otter en Automath) zijn de volgende:
- *www-unix.mcs.anl.gov/AR/otter/*
- *http://automath.webhop.net*
- *www.cs.ru.nl/~freek/aut/*
- *www.cs.ru.nl/~freek/digimath/*
- *www.cs.ru.nl/~freek/qed/qed.html*

Een greep uit de bibliotheek van geheel geformaliseerde stellingen:
- de vierkleurenstelling (iedere landkaart in het vlak of de bol kan met vier kleuren zodanig gekleurd worden dat landen die elkaar met meer dan één punt aan elkaar grenzen verschillend gekleurd zijn);
- Bertrand's postulate (tussen n en $2n$ zit altijd een priemgetal);

- de Jordancurve-stelling (een gesloten kromme in het vlak die zichzelf niet snijdt verdeelt het vlak in twee samenhangende gedeelten);
- de priemgetallenstelling (het aantal priemgetallen kleiner dan n is van de orde van $\frac{n}{\log n}$);
- de onmogelijkheid met passer en liniaal een hoek in drieën te verdelen of een kubus te verdubbelen.
Toegegeven, dit is nog geen grensverleggende wiskunde, maar het potentieel om daar te komen is aanwezig. Voor een verdergaande inleiding in het vak zie [4] en [6].

Ondanks deze initiële successen worden er ook wel bezwaren tegen Computer Wiskunde ingebracht, met name dat een bewijs geverifieerd door een computer meestal niet begrijpelijk is. Dat kan waar zijn, maar heel lange bewijzen zijn dat ook niet. De overgang van een overzichtelijk bewijs naar een bewijs dat niet geheel in het bewustzijn past en door een computer geverifieerd moet worden, dus van een romantisch naar een *cool* bewijs, kun je vergelijken met de overgang in de biologie van aandacht voor bloemen en vlinders naar die voor genen. De romantische biologie blijft boeien, maar die van de genen heeft daar direct betrekking op, meer dan de romantici zouden willen. Een dergelijke verschuiving zal naar onze mening ook binnen de wiskunde plaats vinden. En net zoals bij biologie zal menselijk vernuft en vakintuïtie hard nodig blijven.
Iedere wiskundige kent het gevoel van tevredenheid wanneer hij of zij een stelling bewezen heeft. In de computerwiskunde blijft dat het geval. De emotie wordt nog sterker, want het is duidelijk dat *alle* details daadwerkelijk ingevuld *zijn*. Bij romantische bewijzen heeft men de tevredenheid omdat men ervan overtuigd is dat de details ingevuld *kunnen worden*. Een niet-wiskundige kan de ervaring van het maken of volgen van een (gewoon romantisch) bewijs niet goed navoelen. Daarvoor moet men door de ervaring van het bewijzen heen gegaan zijn. Een vergelijkbaar effect treedt op bij het maken van een geformaliseerd bewijs: dat kan alleen naar emotionele waarde geschat worden door het gedaan te hebben. De intrinsieke waarde van de computerwiskunde ligt in de volledige duidelijkheid, correctheid en mechanische manipuleerbaarheid van de resultaten. Bij computeralgebrasystemen is dit niveau nog ver te zoeken.

De verwachting is dat over zeg 10 à 50 jaar, een korte periode vanuit historisch oogpunt bezien, Computer Wiskunde gemeengoed zal zijn geworden. Menselijke intuïtie zal samenwerken met de precisie van een computer. In principe is de huidige stand van de grondslagen van de wiskunde voldoende om dit nu al te doen. De uitdaging is echter om de bestaande systemen meer gebruikersvriendelijk voor wiskundigen te maken, door voldoende geverifieerde bibliotheken en hulpmiddelen te ontwikkelen. Het uiteindelijke doel is om mensen te helpen met het bestuderen, ontwikkelen, communiceren[2], onderwijzen, verifiëren[3] en toepassen van de wiskunde.

Noten

[1] Er zijn ook axioma's, maar die vormen een impliciete definitie van het onderwerp waarmee je je bezig houdt. Zo is er voor de optelling in de natuurlijke getallen het axioma 0 + x = x. Dit is in feite een afspraak: zo willen we optellen.
[2] Computerwiskunde geeft vele mogelijkheden voor de elektronische communicatie van betrouwbare resultaten en het voorkomen van 'corruptie' van het vak. Deze corruptie is niet in ethische maar technische zin bedoeld: het voortbestaan van en vertrouwen op foutieve stellingen. Dat moet worden tegengegaan (zie [5]).
[3] Referees die ingezonden artikelen beoordelen, zullen nog steeds nodig zijn; niet voor de correctheid, maar voor het belang van het werk.

Referenties

[4] Henk Barendregt: Foundations of Mathematics from the Perspective of Computer Verification, Mathematics, Computer Science, Logic - A Never Ending Story. Springer Verlag (2005). Te verschijnen. Zie ook: www.cs.ru.nl/~henk/papers.html.
[5] Henk Barendregt, Arjeh M. Cohen: Electronic communication of mathematics and the interaction of computer algebra systems and proof assistants; Journal of Symbolic Computation, vol. 32(1-2), pp. 3-22 (2001). Computer algebra and mechanized reasoning (St. Andrews, 2000).
[6] Henk Barendregt, Freek Wiedijk: The challenge of computer mathematics. Philosofical Transactions of the Royal Society (2005). Te verschijnen.
[7] B. Buchberger, F. Winkler: Gröbner Bases and Applications. Cambridge University Press (1998).
[8] Shang-Ching Chou: Mechanical geometry theorem proving. Mathematics and its Applications, nr. 41. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co. (1988).
[9] G.E. Collins: Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. In: H. Brakhage (ed.), Proceedings 2nd GI Conference on Automata Theory and Formal Languages, LNCS 33, pp. 134-183. Springer-Verlag (1976).
[10] R.P. Nederpelt, J.H. Geuvers, R.C. de Vrijer: Selected Papers on Automath. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, nr. 133. Amsterdam: Elsevier Science (1994).
[11] Raymond Smullyan: What is the name of this book? The riddle of Dracula and other logical puzzles. Prentice-Hall (1978).
[12] A. Tarski: A decision method for elementary algebra and geometry. Technical Report R-109. Santa Monica (CA): Rand Corporation (1951).

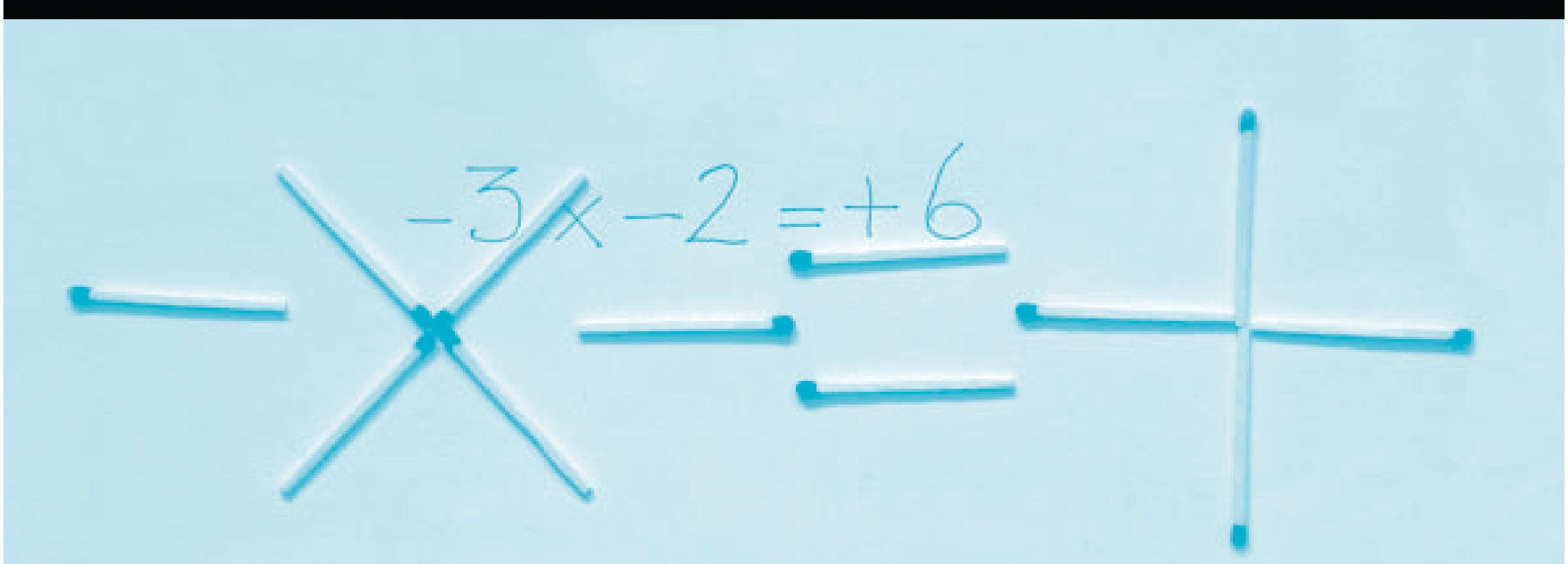
Over de auteurs

Henk Barendregt studeerde mathematische logica bij Dirk van Dalen in Utrecht en promoveerde aldaar op een onderwerp in de lambda calculus. Freek Wiedijk studeerde wiskunde en theoretische fysica aan de Universiteit van Amsterdam en promoveerde aldaar op een onderwerp in de formele methoden, een deelgebied van de informatica.
Beiden zijn werkzaam aan de Radboud Universiteit Nijmegen.
E-mailadressen: henk@cs.ru.nl en freek@cs.ru.nl

MIN MAAL MIN IS PLUS

Bewijzen in de brugklas

[Frits Beukers]



Waarom negatieve getallen

'Beste jongens en meisjes, zoals je weet kunnen we getallen optellen, vermenigvuldigen, delen en van elkaar aftrekken. Alleen dat laatste geeft nog wel eens problemen. Je weet bijvoorbeeld dat 5 - 2 = 3. Maar hoe zit het met 5 – 7? Die lukt niet, want 7 is groter dan 5. Als we met wiskunde verder gaan, blijkt het bijzonder vervelend te zijn om elke keer dat je twee getallen van elkaar aftrekt, je af te vragen of je niet te veel aftrekt. Om dat te verhelpen hebben mensen de *negatieve getallen* uitgevonden. Die zien er zo uit: -1, -2, -3,... Zulke getallen heb je wel vaker gezien: verdieping -1 in de parkeergarage of -10 graden Celsius op de thermometer.'

Met deze zinnen zou in een brugklas vwo/havo een les over negatieve getallen kunnen beginnen. Waarschijnlijk heeft u een andere inleiding, maar in ieder geval moet na een dergelijke opening uitgelegd worden waarom bijvoorbeeld 5 – 7 gelijk is aan -2 en hoe je verder met de negatieve getallen rekent. Het onthouden en gebruiken van de rekenregels zal de doorsnee brugklasser waarschijnlijk nog wel lukken. De motivatie van deze rekenregels is lastiger. Met name 'min maal min is plus' is de regel die de didactici nog de meeste hoofdpijn bezorgt. Dat dit geen probleem van vandaag is, moge blijken uit het veel aangehaalde *La Vie d'Henry Brulard* van Stendhal. Daarin beschrijft de veertienjarige hoofdpersoon zijn ontsteltenis als blijkt dat noch zijn docenten, noch zijn medeleerlingen in staat zijn om uit te leggen waarom min maal min plus is.

Hoe leg je het ze uit?

Heel populair bij de uitleg van negatieve getallen zijn de analogieën met de werkelijkheid. Je geeft negatieve getallen een interpretatie als, bijvoorbeeld, een tekort aan zakgeld of een aantal stappen dat je 'naar links' doet in plaats van 'naar rechts'. In *Moderne wiskunde* wordt zelfs, elke keer dat we iets willen weten, een heks aangeroepen die ter bewijsvoering warme of koude blokjes in de toverketel gooit[1]. Via analogie zijn optellen en aftrekken goed uit te leggen. Zelfs een vermenigvuldigingsregel als 3 × (-2) = -6 kun je daar nog mee motiveren, in de trant van 'een driedubbele schuld is nog meer schuld'. Maar van een gelijkheid als (-2) × (-3) = 6 heb ik nog geen bevredigende interpretatie gezien. Alleen maar gekunstelde interpretaties die je slechts doen afvragen wat het nut van negatieve getallen is. Want waarom zou men überhaupt twee negatieve getallen met elkaar wíllen vermenigvuldigen - alleen om een denkbeeldige heks te plezieren? Als er geen andere motivaties zijn, dan lijkt me dit niet zo'n zinvolle bezigheid. Misschien moeten we het maar gewoon toegeven: er zijn geen realistische modellen te bedenken die de rekenkunde met negatieve getallen beschrijven. Dit verklaart meteen waarom men in de didactiek zo met deze problemen worstelt.

Uit de geschiedenis van de wiskunde leren we iets soortgelijks. De acceptatie van de negatieve getallen en hun rekenregels is aanzienlijk vertraagd door het feit dat men aan getallen al of niet bewust een betekenis toekende in de vorm van aantallen of afmetingen. Op die manier is het rekenen met -1 net zo imaginair als het rekenen met √-1, want geen van beide heeft een interpretatie zoals de positieve getallen die hebben. Pas vanaf eind 18e, begin 19e eeuw, toen men begon in te zien dat je getallen ook kunt zien als symbolen waarmee het handig rekenen is, werden de negatieve getallen algemeen geaccepteerd. Soms kun je er zinvolle interpretaties aan geven, soms niet. Mocht u zelf eens terug willen gaan in deze geschiedenis, dan kan ik u het gedegen boekje *De geschiedenis van positief en negatief* door P.G.J. Vredenduin aanbevelen.

De acceptatie van de negatieve getallen als reken-symbolen, zonder aardse betekenis, heeft een belangrijke consequentie voor de didactiek, namelijk: de enige manier om 'min maal min is plus' te onder-bouwen is die door formeel redeneren. En hiermee zijn we op ons hoofdthema terecht gekomen.

Bewijzen?

Zoals u weet wordt er in de brugklas niets aan bewijzen gedaan en met het huidige programma zijn er ook nauwelijks onderwerpen die zich daarvoor lenen. Vrijwel het enige onderwerp dat daar wel geschikt voor zou kunnen zijn, is dat van de negatieve getallen.

Om dit te illustreren zal ik in dit artikel een afleiding geven van de rekenregels voor negatieve getallen die geen beroep doet op wat voor plaatjes of interpretaties dan ook. Het woord 'afleiding' gebruik ik hier met enig voorbehoud. Strikt genomen is het zo dat we de rekenregels voor negatieve getallen gewoon postuleren, ofwel 'poneren' in dagelijks taalgebruik. In zijn boekje *Imagining Numbers* zet Barry Mazur, één van de bekendste getaltheoretici van dit moment, de situatie op scherp door inderdaad 'min maal min is plus' als postulaat aan te nemen. Logische vervolgvraag is natuurlijk waarom je dit zo postuleert. Het antwoord is dat dit de enige manier is om ervoor te zorgen dat we met de negatieve getallen een uitgebreider getalsysteem krijgen waarin we zonder zorgen kunnen aftrekken (dus geen onmogelijke aftrekkingen) en waarbij nog steeds de basisregels van de algebra gelden. Hoe dit in zijn werk gaat en wat precies met die basisregels van de algebra bedoeld wordt, zullen we in de rest van dit artikel zien.

Belang van duidelijke uitgangspunten

De beginnende brugklasleerling kent de positieve gehele getallen, positieve breuken en het getal 0. Voor het gemak zullen we dit de *gewone getallen* noemen. Bij het rekenen met die getallen gebruiken we vaak eigenschappen waar we nauwelijks bij stilstaan, zeker de brugklasleerlingen niet. Een eerste leermoment kan nu optreden door de regels voor het rekenen met gewone getallen expliciet onder de aandacht te brengen. Dit is niet alleen heel leerzaam, het is ook nodig voor ons verhaal over de negatieve getallen.

Verwisselbaarheid

Eerst een afspraak. Als we opschrijven 10 – 7 + 3, dan bedoelen we daarmee: eerst 7 van 10 aftrekken,

daarna bij het resultaat 3 optellen. We werken dus van links naar rechts. Als we opschrijven 10 + 3 – 7, dan bedoelen we: eerst 3 bij 10 optellen, daarna van het resultaat 7 aftrekken. Hoewel de berekeningen verschillend zijn, is het antwoord natuurlijk hetzelfde: 10 – 7 + 3 = 10 + 3 – 7 = 6. Ook 3 + 10 – 7 geeft het antwoord 6. Dit is een gevolg van de *verwisselbaarheid van optellen/aftrekken*. Verandering van de volgorde van optellen en aftrekken heeft geen invloed op de einduitkomst. Alleen even oppassen, 3 – 7 + 10 geeft een probleem, want we kunnen 7 niet van 3 aftrekken. Deze laten we dus gewoon niet toe. Althans, voorlopig niet. Later, als we de negatieve getallen kennen, kunnen we wél een zinvol antwoord geven en komt er gewoon weer het eindantwoord 6 tevoorschijn. Correcter gezegd, wij zullen de rekenregels voor negatieve getallen zó inrichten dat er ook weer 6 uitkomt.

Ook bij vermenigvuldiging van de gewone getallen maken we de afspraak dat we van links naar rechts werken. Zoals we weten, geldt de *verwisselbaarheid van vermenigvuldiging*. Dus bijvoorbeeld
2 × 7 × 5 = 5 × 2 × 7 = 7 × 5 × 2 = ... = 70

Bij berekeningen met zowel × als +/– tekens moeten we oppassen, want: *vermenigvuldigen gaat vóór optellen/aftrekken*. Dus bij uitwerking van bijvoorbeeld 2 × 3 + 5 × 7 moeten eerst de vermenigvuldigingen worden uitgewerkt en dan de resultaten opgeteld. Hier valt niets aan te snappen, het is gewoon een afspraak waar je je strikt aan dient te houden.

Haakjes wegwerken

Als je een serie optellingen en aftrekkingen wilt uitvoeren in een andere volgorde dan van links naar rechts, dan moeten er haakjes geplaatst worden. Bijvoorbeeld: bij 15 – (9 + 2) moeten we eerst de berekening tussen haakjes uitvoeren, 9 + 2 = 11, en daarna pas mag je 11 van 15 aftrekken. Alles wat tussen haakjes staat heeft dus voorrang. Het is ook *streng verboden* om zomaar die haakjes weg te laten. In ons voorbeeld zouden we daarmee 15 – 9 + 2 overhouden en dat is iets heel anders. We weten immers heel goed dat 15 – (9 + 2) hetzelfde is als 15 – 9 – 2. Dit laatste is een voorbeeld van de volgende vier regels die iedereen zou moeten kennen van het rekenen met gewone getallen.

(1) $a + (b + c) = a + b + c$
(2) $a + (b - c) = a + b - c$
(3) $a - (b + c) = a - b - c$
(4) $a - (b - c) = a - b + c$

Deze regels gelden voor alle gewone getallen a, b en c, mits we onderweg maar geen onmogelijke aftrekkingen tegenkomen, zoals 3 – 8. In het huidige onderwijs mogen we jammer genoeg in de brugklas geen letters in formules gebruiken, zoals we net deden. Maar dan nog zullen de leerlingen vanuit voorbeelden deze regels wel kennen. In ieder geval kan het geen kwaad deze regels nog eens expliciet vast te stellen, met of zonder letters. Later, bij het echte letterrekenen, heb je hier ongelofelijk veel profijt van.

Het is mogelijk om aan te tonen dat de regels (1) t/m (4) volgen uit de verwisselbaarheid van optellen/aftrekken. Voor de brugklas zou ons verhaal daarmee te ingewikkeld worden, daar is de uitleg van regel (4) al uitdaging genoeg. Maar voor uzelf kunt u natuurlijk proberen deze regels te bewijzen.

Haakjes hebben ook voorrang boven vermenigvuldiging. Als we schrijven 11 × (5 + 3), dan moet eerst de optelling 5 + 3 = 8 worden uitgevoerd, en daarna rekenen we 11 × 8 uit. Ook hier geldt dat we niet zomaar die haakjes mogen weglaten. We zouden 11 × 5 + 3 krijgen, en dat is iets totaal anders dan waarmee we begonnen. Mochten we toch die haakjes weg willen werken, dan gebruiken we 11 × (5 + 3) = 11 × 5 + 11 × 3. Dit is een voorbeeld van de volgende algemene regels:

(5) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
(6) $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

voor alle gewone getallen a, b, c. We noemen deze regels de *distributieve eigenschappen*.

Negatieve getallen

Tot nu toe hebben we het alleen over de gewone getallen gehad, dat wil zeggen positieve getallen en nul. We voeren nu de negatieve getallen in, die worden aangegeven met de symbolen -1, -2, -3½, etc. Kortom, de positieve getallen met een kort streepje ervoor.
We zouden er ook voor kunnen kiezen de negatieve getallen in het rood aan te geven, net als de rode cijfers in veel boekhoudingen. Een ander alternatief zou zijn de negatieve getallen met onderstreping aan te geven, dus $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3½}$, etc. Om de aansluiting te houden met wat gebruikelijk is, zal ik het streepje vóór de getallen gebruiken. Maar dan wel een kort streepje '-' ter onderscheiding van het teken '–' dat we voor aftrekking gebruiken.
Let op: negatieve getallen zijn op dit moment niets anders dan symbolen. Je kunt er nog niks mee. Nu komt het probleem hoe we met de gewone en zojuist ingevoerde negatieve getallen willen gaan rekenen. Dus: wat moeten we verstaan onder 11 + -7, of -3 + -6? En in het bijzonder, wat is 5 – 7, het probleem waarmee we dit artikel begonnen? Zoals Mazur het zegt, het is tijd om aan de ontwerptafel te gaan zitten en een ontwerp voor het rekenen met de negatieve getallen te maken. A priori hebben we alle mogelijkheden, maar er is een drietal belangrijke restricties dat het geheel zinvol maakt:
(A) 0 – 1 = -1, 0 – 2 = -2, 0 – 3½ = -3½, etc.
(B) De regels van verwisselbaarheid van optellen/aftrekken en verwisselbaarheid van vermenigvuldiging blijven geldig.
(C) De regels (1) tot en met (6) voor het haakjes weg-werken blijven geldig.
Het is van te voren helemaal niet duidelijk of zoiets

kan worden gerealiseerd. Misschien stellen we wel te veel eisen. Maar neem eens aan dat het wel kan. Dan zal blijken dat optellen, aftrekken en vermenigvuldigen uniek zijn vastgelegd door afspraken (A), (B) en (C). Dit is precies hetgeen we willen laten zien én het doel van dit artikel.

Optellen en aftrekken

Laten we eerst beginnen met de onmogelijke aftrekkingen, bijvoorbeeld 5 – 7 uit het begin. Waarom komt daar -2 uit? Volgens regel (2) kunnen we, in plaats van 7, ook eerst 5 en daarna 2 aftrekken. Dus 5 – 7 = 5 – (5 + 2) = 5 – 5 – 2. Dat laatste is gelijk aan 0 – 2 en volgens afspraak (A) is dat -2. Op deze manier kunnen we nu elke aftrekking van gewone getallen van een antwoord voorzien.

Nu we dit weten zijn we ook klaar voor het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van negatieve getallen. Hier is het recept dat we steeds zullen gebruiken:

Om met een negatief getal te rekenen vervang je het door 0 min de positieve waarde, omringd door haakjes, en werkt vervolgens de haakjes weg.

Bijvoorbeeld: 11 + -7. We vervangen -7 door (0 – 7) (afspraak A) en werken vervolgens haakjes weg volgens regel (1).
11 + -7 = 11 + (0 – 7) = 11 + 0 – 7 = 11 – 7 = 4.
Negatieve getallen aftrekken gaat ook, bijvoorbeeld 5 – -3, ditmaal met regel (3).
5 – -3 = 5 – (0 – 3) = 5 – 0 + 3 = 5 + 3 = 8.
In het bijzonder zie je aan voorbeelden van het laatste type dat aftrekken van een negatief getal neerkomt op optelling van zijn positieve waarde.

Tenslotte twee negatieve getallen optellen, bijvoorbeeld -5 + -6.
-5 + -6 = (0 – 5) + (0 – 6) = 0 – 5 + 0 – 6 =
0 + 0 – 5 – 6 = 0 – 5 – 6 = 0 – 11 = -11.
Welke regels worden hier gebruikt?
Als bovenstaande voorbeelden duidelijk zijn kun je alle opgaven over optellen en aftrekken maken.

Vermenigvuldigen

Bij vermenigvuldiging kunnen we op dezelfde manier te werk gaan. Neem bijvoorbeeld -2 × 3. Net als eerder vervangen we -2 door (0 – 2) en gaan aan de slag:
-2 × 3 = (0 – 2) × 3 = 0 × 3 – 2 × 3 = 0 – 6 = -6.
Een voorbeeld dus van 'min maal plus is min'.

En dan een voorbeeld van 'min maal min is plus':
-3 × -4 = -3 × (0 – 4) = -3 × 0 – -3 × 4 = 0 – -12 = 12.
Deze laatste was niet makkelijk, eerst distributiviteit gebruiken en daarna 'min maal plus is min'. Aangezien we voor deze laatste regel ook al distributiviteit nodig hadden, is in feite nu tweemaal de distributieve eigenschap gebruikt.
Voor degenen die 'min maal min is plus' uitleggen aan de hand van voortzetting van vermenigvuldigingstafels is het misschien een interessante oefening om na te gaan dat ook hier op verborgen manier de distributieve eigenschap in een soort tweetrapsraket wordt gebruikt.

Tenslotte

We wilden de gewone getallen met de negatieve getallen uitbreiden om een getalsysteem te krijgen dat ook gesloten is ten aanzien van aftrekken en waarbij nog steeds de gebruikelijke rekenregels gelden zoals verwoord in afspraken (A), (B) en (C).
We hebben laten zien dat door deze eisen optelling en vermenigvuldiging van negatieve getallen is vastgelegd. Dit lijkt mij een boodschap die je in de brugklas kwijt kunt.
Natuurlijk kun je de noodzaak van negatieve getallen motiveren door te wijzen op negatieve temperaturen en tekorten aan zakgeld. Maar dat zijn negatieve getallen als labels, niet bedoeld om mee te rekenen. Niemand heeft behoefte om twee temperaturen onder nul met elkaar te vermenigvuldigen (boven nul trouwens ook niet).
De boven gegeven afleidingen zijn kort, in de vorm van voorbeelden, en lenen zich hopelijk voor presentatie in de brugklas. Je kunt er bijna een spel van maken, met glasheldere en onverbiddelijke spelregels, dat steeds weer tot een goed einde komt. Misschien zijn sommigen van u bereid dit eens te proberen.

Noot

[1]Zie http://editie7.modernewiskunde.wolters.nl/nieuws/heks/heks.htm

Literatuur

- *P.G.J. Vredenduin: De geschiedenis van positief en negatief. Wolters-Noordhoff (1991).*
- *Stendhal: La vie d'Henry Brulard. Vertaling door John Sturrock: The Life of Henry Brulard. Penguin (1995), pp. 355-358.*
- *Barry Mazur: Imagining Numbers. Picador (2004).*

Over de auteur

Prof.dr. Frits Beukers is hoogleraar algebra aan de Universiteit Utrecht. Hij is auteur van Getaltheorie voor Beginners (Epsilon Uitgaven Utrecht), gericht op het niveau van vwo-docenten, en van het Zebraboekje Pi, deel 6 van de serie uitgegeven door Epsilon Uitgaven en de NVvW.
Emailadres: beukers@math.uu.nl

ROL EN FUNCTIE VAN HET BEWIJS IN DE DYNAMISCHE MEETKUNDE

[Michael de Villiers]

Inleiding

Dis welbekend onder hoërskool onderwysers dat leerlinge nie spontaan 'n behoefte aan bewysvoering openbaar nie, en word sonder uitsondering in opvoedkundige navorsing ge-identifiseer as 'n belangrike probleem met die onderrig van bewysvoering. Wie het nog nie frustrasie ervaar wanneer gekonfronteer met leerlinge wat vra: 'Waarom moet ons dit bewys?', veral as die resultaat vanselfsprekend voorkom of maklik empiries bevestig kan word.

[Red.: Vanaf hier vervolgen we het artikel in Nederlandse vertaling uit het Engels.]

Volgens Afanassjewa in [7, p. 29] moeten de problemen die leerlingen hebben met bewijzen, niet simpelweg worden toegeschreven aan trage cognitieve ontwikkeling (bijvoorbeeld onvermogen om logisch te redeneren), maar ook aan het feit dat de leerling de *functie (betekenis, doel en nut) van een bewijs niet inziet*.

De eerste vraag is daarom: 'Welke functies heeft een bewijs binnen de wiskunde zelf, die mogelijk gebruikt kunnen worden in de wiskundeles om bewijsvoering tot een zinvollere activiteit te maken?' Het doel van dit artikel is om een aantal belangrijke functies van bewijzen te beschrijven en kort iets te zeggen over sommige implicaties van het leren bewijzen in het kader van de dynamische meetkunde.

De functies van het bewijs in de wiskunde

Van oudsher is de functie van het bewijs vrijwel uitsluitend gezien als het *verifiëren* van de juistheid van wiskundige beweringen. Het idee is dat bewijs voornamelijk wordt gebruikt om hetzij eigen twijfel dan wel twijfel van sceptici weg te nemen, een idee dat het onderwijs en vrijwel alle discussie over en onderzoek naar het leren bewijzen eenzijdig heeft gedomineerd.

Maar de visie dat verificatie/overtuiging de belangrijkste functie van bewijzen zou zijn, staat (zoals Bell heeft gesteld in [3, p. 24]) beschouwing van de ware natuur van het bewijs in de weg, omdat

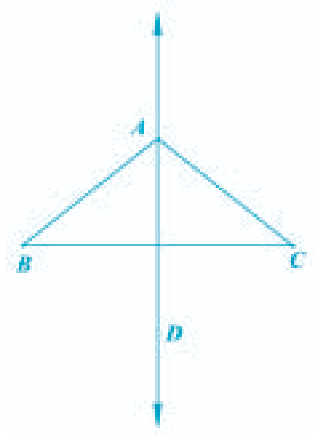
overtuiging in de wiskunde vaak wordt verkregen door heel andere middelen dan bestudering van een logisch bewijs. Het bedrijven van modern wiskundig onderzoek vraagt om een completere analyse van de verschillende functies en rollen van het bewijs. Bewijs heeft binnen de wiskunde veel meer functies, die in sommige situaties wezenlijk belangrijker zijn dan alleen maar *verificatie*, bijvoorbeeld:

- *uitleg* (doen inzien waarom iets waar is),
- *ontdekking* (het ontdekken of bedenken van nieuwe resultaten),
- *communicatie* (de sociale uitwisseling van wiskundige kennis en betekenis),
- *systematisering* (verschillende resultaten onderbrengen in een deductief systeem van axioma's, basisconcepten en stellingen).

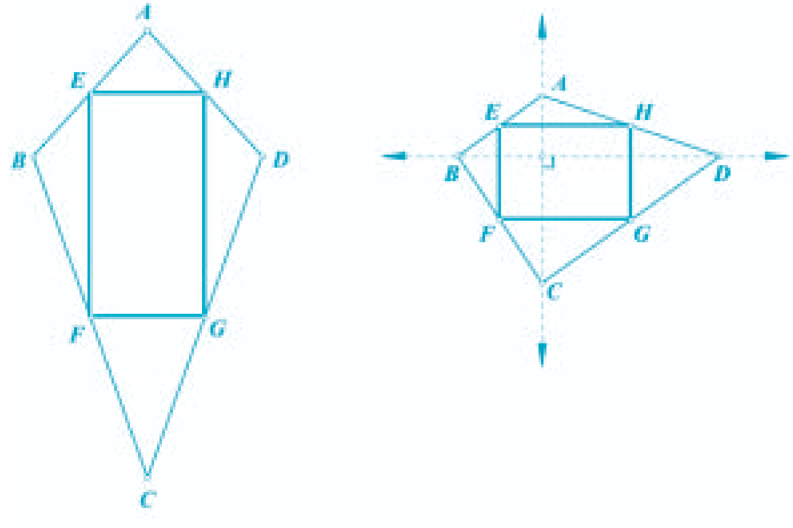
Elk van deze functies zal hieronder kort worden besproken en toegelicht, in de volgorde die volgens mij ook de beste is om ze bij leerlingen te introduceren.

Bewijs als middel om iets uit te leggen

Vrijwel zonder uitzondering lijken wiskundeleraren te geloven dat alleen *bewijs* een mathematicus zekerheid kan verschaffen, en dus het enige middel is om de juistheid van een hypothese aan te tonen.



FIGUUR 1



FIGUUR 2

Toch is bewijs niet altijd een voorwaarde om ergens van overtuigd te zijn – integendeel, waarschijnlijk is overtuiging veel vaker een voorwaarde voor het zoeken naar een bewijs.
De bekende George Polya (zie [11, pp. 83-84]) schrijft: '... nadat we de stelling in verschillende speciale gevallen hadden geverifieerd, hadden we krachtig inductief bewijs verzameld. De inductieve fase overwon ons aanvankelijk wantrouwen en gaf ons een sterk *vertrouwen* in de stelling. Zonder dat *vertrouwen* zouden we nauwelijks de moed hebben gevonden om af te gaan op een bewijs dat er bepaald niet eenvoudig uitzag. Als je eenmaal zelf overtuigd bent dat een stelling *waar* is, begin je aan het *bewijs*.' (Cursivering later aangebracht.)
In situaties als de bovenstaande, waarbij overtuiging vooraf de motivatie voor het bewijzen is, moet de functie van het bewijs duidelijk iets anders zijn dan verificatie of overtuiging.
In echt wiskundig onderzoek is persoonlijke overtuiging meestal gebaseerd op een combinatie van intuïtie, quasi-empirische verificatie en het bestaan van een logisch (maar niet noodzakelijkerwijs afdoend) bewijs. Zelfs zonder enig bewijs kan soms een zeer hoog overtuigingsniveau worden bereikt.
Een voorbeeld: bij hun discussie over de 'heuristische onderbouwing' voor het nog altijd onbewezen vermoeden van de tweelingpriemgetallen en de beroemde Riemann-hypothese, concluderen Davis en Hersh (zie [4, p. 369]) dat deze onderbouwing *'zo sterk [is], dat hij zelfs zonder afdoend bewijs toch overtuigend is'.*
Bij onderzoek naar de juistheid van een nieuwe, onbekende hypothese zoeken wiskundigen gewoonlijk niet alleen naar bewijzen, maar ze proberen ook tegenvoorbeelden te vinden door middel van quasi-empirische tests, want zulke tests kunnen verborgen tegenspraken, fouten of ongefundeerde aannamen aan het licht brengen. Op die manier worden soms tegenvoorbeelden gevonden die de wiskundige noopt om oude bewijzen te herzien en nieuwe te creëren. Het lijkt erop dat aan het verkrijgen van zekerheid zowel een logische als een psychologische kant zit. De logica vereist een of ander deductief bewijs, maar psychologisch lijken we daarnaast behoefte te hebben aan enig experimenteel onderzoek of intuïtief begrip.

Voorbeelden

De meeste leraren hebben vast wel eens opgemerkt dat leerlingen gefrustreerd kunnen raken als zij een intuïtief vanzelfsprekend resultaat moeten bewijzen (verifiëren), zoals *pons asinorum* ('de basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk'). Stel dat leerlingen wordt gevraagd om binnen een omgeving als *Cabri* of *Sketchpad* een gelijkbenige driehoek te construeren door spiegeling langs de lijn *AD* (zie figuur 1) en dan de basishoeken te meten. Omdat ze door de figuur te verslepen snel en accuraat een groot aantal gevallen kunnen onderzoeken, is die ervaring doorgaans zeer overtuigend.
Proberen om de leerlingen vervolgens te doordringen van de noodzaak om de juistheid van dit resultaat *aan te tonen*, is niet alleen zinloos, maar naar mijn mening ook een slechte vorm van wiskunde bedrijven. Het gaat hier helemaal niet om het wegnemen van twijfel, maar om duidelijk te maken waarom iets juist is.
In het algemeen moeten volgens mij vlakke meetkundige figuren als drie- en vierhoeken zoveel mogelijk worden benaderd via symmetrie-transformaties. De reden is dat de zo gevonden eigenschappen dan heel makkelijk kunnen worden verklaard, en het niet nodig is om in dit stadium over te gaan tot ingewikkelde congruentie-bewijzen. Ook is aan te bevelen om te proberen in dit stadium het woord *bewijs* geheel te vermijden, en in plaats daarvan de leerlingen om een *logische verklaring* te vragen.
Het volgende is bijvoorbeeld heel bruikbaar: de zijden *AB* en *AC* zijn evenals de hoeken *ABC* en *ACB* gelijk, omdat vouwen (spiegelen) langs de geconstrueerde symmetrieas door *A* (volgens de definitie van symmetrie) *AB* afbeeldt op *AC*, en hoek *ABC* op hoek *ACB*.

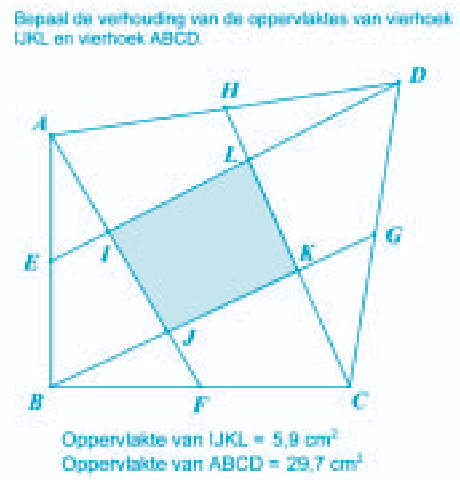
In [6] wordt op dezelfde manier een vlieger geïntroduceerd door spiegeling in de symmetrieas door twee overstaande hoekpunten, waarna de eigenschappen worden onderzocht en logisch verklaard met behulp van die symmetrieas. Op precies dezelfde manier kunnen een gelijkbenig trapezium en een rechthoek worden benaderd (en hun eigenschappen verklaard), via spiegeling in symmetrieassen door twee overstaande zijden, een parallellogram door rotatie van een driehoek over 180 graden om het midden van een der zijden, enz.
Het is op het niveau van eerste kennismaking met meetkundig bewijs ook prima om gewoon een aantal elementaire resultaten als feiten aan te merken, en ze dan te gebruiken om andere, interessantere en spannender resultaten logisch te verklaren.
Zo kan bijvoorbeeld rustig worden aangenomen dat het lijnstuk dat de middens van twee zijden van een driehoek verbindt, evenwijdig is aan de derde zijde, om met behulp daarvan een resultaat aan te tonen dat leerlingen veel meer aanspreekt, namelijk de stelling van Varignon: de middens van de zijden van een vierhoek vormen de hoekpunten van een parallellogram (het zogenoemde Varignon-parallellogram; red.). Je kunt dan altijd later nog een keer op deze aannamen terugkomen, als de leerlingen wat verder zijn en enig begrip en waardering hebben ontwikkeld voor de systematiserende functie van bewijs. Ook historisch gezien is veel meetkundetheorie niet begonnen met het logisch uitwerken van expliciet geformuleerde axioma's en elementaire resultaten tot ingewikkelder resultaten, maar juist andersom: vanuit de ingewikkelde resultaten werden achteraf de onderliggende aannamen en axioma's gereconstrueerd.
Overigens, hoewel het mogelijk is om een grote mate van vertrouwen in de juistheid van een hypothese te kweken door empirische verificatie met de hand of per computer, levert dit geen bevredigende verklaring op voor het waar zijn van de veronderstelling. Het bevestigt alleen maar dát het waar is, en hoewel steeds meer voorbeelden het vertrouwen zullen doen toenemen, geeft het geen psychologisch bevredigend gevoel van inzicht, van begrip hoe of waarom de hypothese het gevolg is van andere, vertrouwde resultaten.
Een veelzeggend resultaat van een studie door Mudaly en De Villiers (zie [10]) was, dat jonge leerlingen geïnteresseerd bleken in een verklaring van (dieper inzicht in) de stelling van Viviani[1], helemaal los van hun behoefte aan overtuiging, die al volledig was bevredigd door onderzoek met dynamische meetkundesoftware. Deze onafhankelijke behoefte aan verklaring kan volgens mij heel effectief worden uitgebuit voor een eerste kennismaking van leerlingen met de waarde van logische redenering (bewijs), zoals uit bovengenoemde voorbeelden mag blijken.

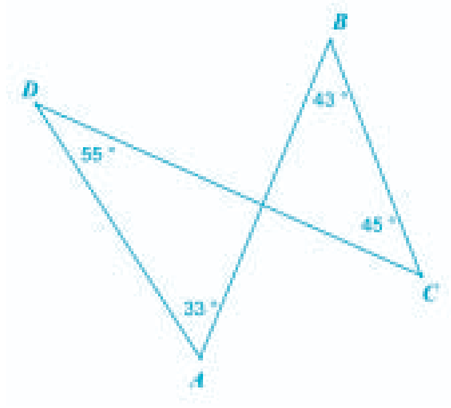
Bewijs als ontdekkingsmechanisme

Vaak wordt gezegd dat stellingen meestal eerst worden ontdekt door intuïtie en/of quasi-empirische methodieken, en dan pas worden geverifieerd door middel van bewijzen. Toch zijn er ook talrijke voorbeelden in de geschiedenis van de wiskunde waarbij nieuwe resultaten werden ontdekt of bedacht door pure deductie. Het is zelfs bijzonder onwaarschijnlijk dat sommige resultaten (bijvoorbeeld in de niet-Euclidische meetkunde) ooit zijn begonnen met uitsluitend intuïtie en/of quasi-empirische methodieken. Zelfs binnen de context van formele deductieve processen als axiomatiseren en definiëren, kan bewijs dikwijls tot nieuwe resultaten leiden.
Neem bijvoorbeeld het volgende geval. Stel dat we met *Sketchpad* of *Cabri* een dynamische vlieger hebben geconstrueerd en de middens van de zijden hebben verbonden tot de vierhoek *EFGH*, zoals in figuur 2 (links). Op het oog lijkt *EFGH* duidelijk een rechthoek te zijn, wat door meting van de hoeken makkelijk kan worden geverifieerd. We kunnen nu een willekeurig hoekpunt van de vlieger *ABCD* verslepen en verifiëren dat *EFGH* een rechthoek blijft. We kunnen ook hoekpunt *A* omlaag brengen tot de figuur concaaf wordt om na te gaan of het dan nog steeds waar blijft. Hoewel al die variaties ons makkelijk overtuigen, geven ze geen bevredigende verklaring van het feit dat het Varignon-parallellogram van een vlieger altijd een rechthoek is. Maar als we een deductief bewijs voor deze hypothese geven, merken we onmiddellijk op dat de onderlinge loodrechte stand van de diagonalen het essentiële kenmerk is waarop het bewijs berust, en dat de eigenschap van gelijke aanliggende zijden daarom niet vereist is. (Het bewijs mag de lezer zelf leveren.) Met andere woorden, we kunnen het resultaat direct generaliseren voor elke vierhoek waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan, zoals getoond in figuur 2 (rechts). Dit gegeneraliseerde resultaat wordt geenszins gesuggereerd door de pure verificatie van de oorspronkelijke hypothese. Zelfs een systematisch empirisch onderzoek naar verschillende soorten vierhoeken zou waarschijnlijk niet tot het gegeneraliseerde resultaat hebben geleid, omdat we het onderzoek vermoedelijk zouden hebben beperkt tot de bekende vierhoeken als parallellogrammen, rechthoeken, ruiten, vierkanten en gelijkbenige trapezia.

Bewijs als middel tot verificatie (rechtvaardiging)

In verband met de bekende beperkingen van intuïtieve, inductieve of empirische methoden zelf zijn bovenstaande argumenten natuurlijk beslist niet bedoeld om het belang van bewijs als onmisbaar verificatiemiddel te ontkennen, met name als het gaat om verrassende niet-intuïtieve of twijfelachtige resultaten.
Hoewel bij een eerste kennismaking met bewijzen de verificatiefunctie van een bewijs dus niet geschikt is bij het gebruik van dynamische meetkunde, geloof ik zeker dat die later wel degelijk aan de orde kan (en moet) komen om de leerlingen een beter inzicht te geven in de waarde en aard van een deductief bewijs.
Neem het volgende voorbeeld uit [6], dat (naar proefondervindelijk is aangetoond) de boodschap goed aan de leerlingen overbrengt.
De leerlingen krijgen de *Cabri*- of *Sketchpad*-figuur van figuur 3 om de verhouding van de oppervlakten te bepalen, verder onderzoek te doen en dan een hypothese te formuleren. Als opzettelijk (misleidend)





FIGUUR 3 **FIGUUR 4**

psychologisch element wordt een meetnauwkeurigheid gevraagd van slechts één cijfer achter de komma.
Dan zal ongeacht wat de leerlingen aan de vierhoek verslepen, de verhouding telkens 0,2 blijken te zijn. Waarschijnlijk zullen de leerlingen al snel zeggen dat ze 100% zeker van hun zaak zijn. Het zal dan ook een hele schok zijn als hun gevraagd wordt de meetnauwkeurigheid te verhogen en ze dan moeten vaststellen dat na het eerste cijfer achter de komma wel degelijk veranderingen optreden, die alleen door de afronding op 1 decimaal aanvankelijk niet ontdekt werden.
Dit is dus een goed voorbeeld om leerlingen ervan te doordringen dat dynamische meetkundesoftware weliswaar heel nauwkeurig is en buitengewoon bruikbaar voor onderzoek naar de juistheid van schattingen, maar dat je er nog altijd onjuiste inschattingen mee kunt maken als je niet uiterst zorgvuldig te werk gaat. Zelfs als je meet met een nauwkeurigheid van 5 decimalen (het maximaal haalbare bij *Sketchpad*), heb je nog geen absolute zekerheid over het vijfde of zesde (of honderdste!) cijfer achter de komma. Daarom is voor definitieve zekerheid een logisch bewijs nodig, zelfs in een overtuigende omgeving als de dynamische meetkunde.

Bewijs als middel tot communicatie

'... definities worden vaak opgesteld en beargumenteerd als er tegenvoorbeelden worden aangevoerd ...' (Lakatos in [9, p. 16])
Neem bijvoorbeeld de volgende opgave uit [6] over de bekende stelling dat de som van de hoeken van een vierhoek altijd 360° is.
Construeer een vierhoek *ABCD* en meet de hoeken. Versleep hoekpunt *D* over de zijde *AB* heen, zodat een figuur ontstaat zoals in figuur 4. Is de som van de binnenhoeken nog altijd 360°? Is *ABCD* nog wel een 'vierhoek'? Wat bedoelen we eigenlijk met 'vierhoek'? Hoe rijm je dit met de hierboven genoemde bekende stelling? Wat zijn eigenlijk *'binnenhoeken'*? Hoe kunnen we de oorspronkelijke stelling herformuleren en hem daarmee 'redden'?

De eerste reactie van de meeste mensen op zo'n 'tegenvoorbeeld' is, om bij de formulering van de stelling dat de som van de hoeken van *elke* vierhoek 360° is, dergelijke '*absurde gevallen*' uit te sluiten. Ze zullen wellicht proberen om een vierhoek zodanig te definiëren, dat dit soort figuren erbuiten valt. Lakatos (in [9], p. 16) beschrijft een soortgelijke situatie waarbij de personages in het boek een tegenvoorbeeld bij de stelling van Euler-Descartes over veelvlakken[2] hebben ontdekt, en er vervolgens een hevige discussie ontstaat over het al dan niet accepteren van dat tegenvoorbeeld.
Dit komt omdat verwerping middels een tegenvoorbeeld vaak afhangt van de betekenis van de gehanteerde termen en daarom vaak definities worden voorgesteld en beargumenteerd. Het gaat erom dat in de dynamische geometrie leerlingen al slepende waarschijnlijk wel eens per ongeluk zo'n gekruiste vierhoek zullen construeren, en dan rijst de vraag of dat nu een vierhoek is of niet, en wat we eigenlijk precies bedoelen met een vierhoek. Hoe kunnen we een vierhoek precies definiëren? Wat bedoelen we met *binnenhoeken*? Hoe kunnen we de oorspronkelijke stelling *redden* of *beter formuleren*?

Bewijs als middel tot systematisering

Een bewijs toont het logisch verband tussen beweringen aan op een manier die met quasi-empirisch onderzoek of pure intuïtie niet mogelijk is. Het is daarom een onmisbaar instrument voor het systematiseren van verschillende bekende resultaten tot een deductief systeem van axioma's, definities en stellingen. Enkele belangrijke functies van een deductieve systematisering van bekende resultaten zijn uitgebreid bediscussieerd in [5].
Hoewel bij elke systematisering uiteraard ook elementen van verificatie aan bod komen, is het hoofddoel duidelijk niet *controleren of bepaalde beweringen echt waar zijn*, maar om logisch niet-verwante beweringen waarvan de juistheid al bekend is, onder te brengen in een *samenhangend geheel*. Wegens het algemene overzicht dat een

dergelijke vereenvoudiging en systematisering oplevert, is er natuurlijk ook een uitgesproken element van verduidelijking aanwezig wanneer bewijs wordt gebruikt als middel tot systematisering. In dit geval echter ligt daarbij meer de nadruk op algemene dan op specifieke verduidelijking. Het is daarom in feite misleidend om op school bij het bewijzen van vanzelfsprekende stellingen (zoals 'de overstaande hoeken bij twee snijdende rechten zijn gelijk'), te stellen dat we bezig zijn te '*verifiëren*'. Wiskundigen maken zich in wezen veel minder druk over de juistheid van zulke stellingen, dan over het onderbrengen ervan in een deductief systeem.
In plaats van de leerlingen alleen kant-en-klare definities te geven zouden ze op een bepaald moment ook zelf een aantal wiskundige objecten moeten definiëren, overeenkomstig Freudenthals idee van *lokale axiomatisering*. Stel bijvoorbeeld dat we een formele definitie van een ruit willen geven, dan zouden we met dynamische meetkunde eerst de volgende mogelijkheden van constructie en meting kunnen onderzoeken (zie [8]):
(a) Een ruit is een vierhoek waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.
(b) Een ruit is een vierhoek waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden en middendoor delen.
(c) Een ruit is een vierhoek met twee paar gelijke aanliggende zijden.
Zo'n empirisch onderzoek toont duidelijk aan dat de eerste en de derde mogelijkheid niet voldoen, maar hoezeer we ook slepen aan een ruit die volgens de specificaties van de tweede mogelijkheid is geconstrueerd, het blijft altijd een ruit. Dit houdt in dat de in (b) gestelde voorwaarden voldoen, en dat die omschrijving dus acceptabel is als officiële definitie, waarmee alle andere eigenschappen van een ruit (bijvoorbeeld 'alle zijden zijn gelijk') als stellingen kunnen worden afgeleid.

Conclusie

Als leerlingen eenmaal een meetkundige hypothese hebben onderzocht met behulp van dynamische software als *Sketchpad* of *Cabri*, hebben ze weinig behoefte meer aan overtuiging of verificatie. Verificatie levert dus weinig of geen motivatie om een bewijs te leveren. Maar het lukt vrij makkelijk om de nieuwsgierigheid van de leerlingen te prikkelen door hen te vragen *waarom* ze denken dat een bepaalde uitspraak waar is, dus ze uit te dagen om het *uit te leggen*. Leerlingen geven doorgaans toe dat inductieve verificatie alleen maar een bevestiging oplevert, geen bevredigend gevoel van inzicht in of begrip van het feit, dat het gaat om een consequentie van andere, bekende resultaten. Ze zijn dan graag bereid om een deductief bewijs niet zozeer te zien als een verificatie, maar als een poging tot verklaring.
Het is ook aan te raden om leerlingen in een vroeg stadium te laten kennismaken met de ontdekkingsfunctie van een bewijs en om aandacht te besteden aan de communicatieve aspecten, door de criteria voor afdoend bewijs met hen te bespreken, de methodiek/heuristiek en de logica waarop het bewijs berust.
De verificatiefunctie van het bewijs moet worden gereserveerd voor resultaten die bij de leerlingen *twijfels* oproepen. De zuivere systematiseringsfunctie van het bewijs komt ten slotte in de echte wiskunde pas in een vergevorderd stadium aan de orde, en moet daarom tot het allerlaatst worden bewaard.

Naschrift

Dit artikel is een aanzienlijk bewerkte en ingekorte versie van het Voorwoord van [6]. De betreffende onderzoeksverslagen, figuren, gemaakt met dynamische meetkundesoftware, en andere bronnen zijn te downloaden van pagina 4 van de homepage van de auteur (*http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage4.html*).

Noten (red.)

[1] Voor een punt binnen een gelijkzijdige driehoek is de som van de afstanden van dat punt tot de zijden van die driehoek gelijk aan de hoogte van die driehoek.
[2] Voor het aantal hoekpunten (H), het aantal ribben (R) en het aantal zijvlakken (Z) van een Platonisch lichaam geldt: H – R + Z = 2.

Documentatie

[3] A.W. Bell: A study of pupils' proof-explanations in Mathematical situations. In: Educational Studies in Mathematics, 7 (1976); pp. 23-40.
[4] Ph.J. Davis, R. Hersh: The Mathematical Experience. Groot-Brittannië: Pelican Books (1983).
[5] M. de Villiers: The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching. (RUMEUS Studies in Mathematics Education No. 2). Universiteit van Stellenbosch (1986). (*)
[6] M. de Villiers: Rethinking Proof with Geometer's Sketchpad. Emeryville, Canada: Key Curriculum Press (2003).
[7] H. Freudenthal: Report on Methods of Initiation into Geometry. Groningen: Wolters (1958).
[8] R. Govender, M. de Villiers: Constructive evaluation in a Sketchpad context. In: Proceedings of AMESA 2002 Congress (July 2002). (*)
[9] I. Lakatos: Proofs and Refutations. Cambridge University Press (1976).
[10] V. Mudaly, M. de Villiers: Learners' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry. In: Pythagoras, 52 (Aug. 2000); pp. 20-23. (*)
[11] G. Polya: Mathematics and Plausible Reasoning. In: Induction and Analogy in Mathematics, Vol 1. Princeton: Princeton University Press (1954).

(*) PDF-bestanden hiervan zijn te downloaden van http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/homepage4.html

Over de auteur

Michael de Villiers is hoogleraar Mathematics Education aan de Universiteit van KwaZulu-Natal, Zuid-Afrika.
E-mailadres: profmd@mweb.co.za
URL: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/

REDENEREN MET DE REGEL VAN BAYES

[Ronald Meester]

Rev. Thomas Bayes, 1702-1761

Inleiding

Stel je eens voor dat een bepaalde ziekte bij 1% van de bevolking voorkomt. Stel je vervolgens voor dat er een test ontwikkeld is die nagaat of iemand deze ziekte heeft. Nu is de test niet helemaal betrouwbaar; de test geeft het juiste antwoord met kans 90%. Als iemand ziek ben, dan is de test positief met kans 90%; als iemand niet ziek is, dan is de test negatief met kans 90%.
Stel nu dat een willekeurige proefpersoon een test ondergaat, en dat tot zijn of haar grote schrik de test een positief resultaat geeft. Wat moeten we hiervan denken? Wellicht ben je geneigd om te denken dat de kans dat onze proefpersoon de ziekte inderdaad heeft nu 90% is; dat was immers de betrouwbaarheid van de test.
Deze redenering is echter niet correct. De fout die hier gemaakt wordt komt voort uit het verwisselen van twee conditionele kansen: enerzijds de kans op ziek zijn gegeven dat de test positief is; anderzijds de kans dat de test positief is gegeven dat je ziek bent.
Een veilige manier om met dit soort berekeningen om te gaan, is de beroemde *regel van Bayes*. Met behulp van deze regel zal ik laten zien dat de kans dat de proefpersoon de ziekte werkelijk heeft niet groter is dan 8,3%! Dit is een verrassend kleine kans; het is een van de vele voorbeelden waarin de uitkomst van een kansberekening tegen je intuïtie in lijkt te gaan.
Nadat ik in de volgende paragraaf deze regel heb uitgelegd en toegepast op het voorbeeld van zojuist, ga ik in de de drie daaropvolgende paragrafen in op drie andere toepassingen van de regel van Bayes. Deze toepassingen laten zien dat het gebruik van de regel van Bayes vaak minder eenvoudig is dan in het voorbeeld van de test. De wiskunde zelf is het probleem niet, wel de vraag of die wiskunde eigenlijk wel iets zinvols zegt over de vraag waar het op dat moment om gaat.
De eerste toepassing komt uit de juridische hoek, en handelt omtrent de vraag hoe we bewijsmateriaal kunnen gebruiken in afwegingen omtrent schuldvragen bij misdrijven. De tweede 'toepassing' is een beetje bizar: een tijdje geleden beweerde de Amerikaanse natuurkundige Stephen Unwin dat hij had uitgerekend dat de kans dat God bestaat gelijk is aan 66%[1]. In de berekening maakt Unwin gebruik van de regel van Bayes, maar ik zal betogen dat dit getal van 66% werkelijk nergens op slaat; een totaal non-voorbeeld en een klassiek geval van de manier waarop kansrekening, en de regel van Bayes in het bijzonder, misbruikt kan worden voor allerlei onzinnige doeleinden. In de laatste paragraaf bespreek ik een toepassing van de regel van Bayes waarmee je wellicht bij onwetende vrienden en vriendinnen nog wat geld kunt winnen...
Soms schrijf ik kansen als getal tussen 0 en 1, soms als percentage. Een kans van bijvoorbeeld 0,3 is dus hetzelfde als een kans van 30%.

De regel van Bayes

Om het principe van de regel van Bayes duidelijk te maken zal ik eerst aan de hand van wat concrete getallen het voorbeeld uit de vorige paragraaf bespreken.
De ziekte waar het om gaat komt zoals gezegd bij 1% van de bevolking voor. Stel nu eens dat de bevolking uit 10000 personen bestaat. Hiervan zijn er dan naar verwachting ongeveer 100 ziek, en 9900 niet ziek (gezond). Van alle zieke mensen geeft de test bij 90% een positief resultaat, dat zijn er dus 90. Van alle gezonde mensen geeft de test bij 90% een negatief resultaat, dat zijn er dus 8910; zie onderstaande tabel.

10000 *pers.*	*pos*	*neg*	(*totaal*)
gezond	990	8910	9900
ziek	90	10	100
(*totaal*)	1080	820	10000

In totaal zijn er nu dus 990 + 90 = 1080 mensen die positief getest worden. Hiervan zijn er slechts 90 ziek. De kans dat een willekeurige positief geteste persoon daadwerkelijk ziek is, is dus gelijk aan $\frac{90}{1080} \approx 0{,}083$, en dat is dus heel wat anders dan de 90% die je wellicht zou verwachten. De reden voor deze uitkomst is dat de ziekte dermate zeldzaam is dat er veel meer mensen zijn die ten onrechte positief worden bevonden, dan echte lijders aan de ziekte.

Voor de toepassingen die ik hieronder wil bespreken is het nodig dat ik dit principe in een wat algemener kader plaats. Stel we willen de kans op een gebeurtenis A bepalen, gegeven dat gebeurtenis B optreedt. Deze *conditionele* kans noteren we doorgaans met $P(A|B)$, en deze is gelijk aan

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad (1)$$

zolang tenminste $P(B) > 0$. Bijvoorbeeld, als A de gebeurtenis voorstelt dat het aantal ogen van een dobbelsteenworp gelijk is aan 4, en B stelt de gebeurtenis voor dat het aantal ogen even is, dan is $P(B)$ de kans op 2,4 of 6 en dus gelijk aan $\frac{1}{2}$. Verder is $P(A\cap B)$ de kans op 4, en dus gelijk aan $\frac{1}{6}$ zodat $P(A|B)=\frac{1}{3}$. Dit is in overeenstemming met je intuïtie, want als je weet dat het aantal ogen even is, dan blijven er nog drie mogelijkheden over, elk met dezelfde kans $\frac{1}{3}$. In het getallenvoorbeeld waarmee ik deze paragraaf begon kun je voor A de gebeurtenis nemen dat een willekeurige persoon ziek is, terwijl B de gebeurtenis voorstelt dat de test positief is.
Vaak is $P(A|B)$ niet direct uit te rekenen, maar $P(B|A)$ en $P(B|A^C)$ wel, waarbij A^c het complement van A voorstelt, de gebeurtenis dat A *niet* optreedt. Met een klein beetje rekenen kunnen we $P(A|B)$ uitdrukken in termen van $P(B|A)$ en $P(B|A^C)$. Dit gaat als volgt.
Als we in (1) de rol van A en B omdraaien, dan vinden we dat

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

hetgeen we kunnen herschrijven als

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A) \qquad (2)$$

We kunnen nu (2) invullen in (1), en vinden dan

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)\times P(A)}{P(B)} \qquad (3)$$

Dit is de eenvoudigste vorm van de regel van Bayes, en deze geeft al een recept om de kans op A uit te rekenen, gegeven dat B optreedt.
Vaak is $P(B)$ echter ook niet rechtstreeks uit te rekenen, en is het nodig om de noemer aan de rechterkant van (3) te herschrijven als $P(A)\times P(B|A)+P(A^C)\times P(B|A^C)$
Dit geeft dan

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)\times P(A)}{P(A)\times P(B|A)+P(A^C)\times P(B|A^C)} \qquad (4)$$

Dit is de tweede verschijningsvorm van de regel van Bayes.
Laten we nu nogmaals terugkeren naar het voorbeeld waarmee ik begon, de test voor de ziekte. We kunnen de regel van Bayes (4) hier als volgt toepassen. Stel A is de gebeurtenis dat een willekeurig gekozen persoon de ziekte heeft, en B is de gebeurtenis dat de test van die persoon positief is. We weten dat $P(A)=\frac{1}{100}$, de ziekte komt immers bij 1% van de bevolking voor, en we gaan er even vanuit dat iedereen met dezelfde kans aan de ziekte lijdt. We zijn nu geïnteresseerd in $P(A|B)$, de kans dat de proefpersoon de ziekte heeft, gegeven dat de test positief is. Deze kans is niet direct te bepalen, maar $P(B|A)$ en $P(B|A^C)$ zijn dat wel. Immers, $P(B|A)$ is de kans dat de test positief is, gegeven dat de persoon ziek is, en die kans was gelijk aan 0,9. Evenzo is $P(B|A^C)$, de kans dat de test positief is gegeven dat de persoon de ziekte niet heeft, gelijk aan 0,1. Vullen we dit alles in in (4), dan vinden we

$$P(A|B)=\frac{0{,}9\times 0{,}01}{0{,}01\times 0{,}9+0{,}99\times 0{,}1}=0{,}083$$

en dit is in overeenstemming met wat we al eerder vonden.

Een juridische toepassing

Een interessante toepassing van de regel van Bayes komt uit de juridische hoek. Net als bij het voorbeeld van de ziekte gaat het ook hier om de gevolgen voor een bepaalde kansinschatting na het verkrijgen van extra informatie. Om het principe uit te leggen beschrijf ik het eenvoudigste geval, niet erg realistisch maar wel leerzaam.
Stel er is een moord gepleegd, en op de plaats van het misdrijf wordt een DNA-profiel gevonden waarvan aangenomen mag worden dat het van de dader afkomstig is. We noemen dit DNA-profiel A. Op een gegeven moment wordt daarna in een laboratorium het DNA-profiel van ene Jan de Vries onderzocht, aanvankelijk zonder enig verband met het eerder genoemde misdrijf. Het blijkt nu echter dat het profiel van Jan de Vries overeenkomt met het profiel A dat op de plaats van het misdrijf werd gevonden. Kunnen we op basis van deze overeenkomst een uitspraak doen over de kans dat Jan de Vries de moordenaar was?
Zonder extra aannames of kennis gaat dat zeker niet, we hebben op zijn minst informatie nodig over de frequentie waarmee het DNA-profiel A voorkomt. Laten we aannemen dat elk individu met kans p_A het profiel A heeft, onafhankelijk van elkaar. Deze aanname is niet helemaal realistisch, want er bestaan zeker afhankelijkheden tussen het DNA-materiaal van familieleden. Voor nu is het echter handig om de zaak zo eenvoudig mogelijk te houden.
Laten we eens zien hoe ver we nu komen. We willen de extra kennis betreffende de overeenkomsten van de DNA-profielen kwantificeren, en daarvoor gebruiken we de regel van Bayes in de vorm van (3). Beschouw hiertoe de volgende gebeurtenissen: H_p is de gebeurtenis (of hypothese) dat Jan de Vries de moordenaar is; H_d is de gebeurtenis (of hypothese) dat iemand anders de moordenaar is. Tenslotte is E de gebeurtenis dat het DNA-profiel op de plek van de moord en dat van Jan de Vries allebei gelijk zijn aan A. De gekozen notatie heeft een Engelstalige achtergrond: H_p staat voor 'hypothese van de *prosecutor* (aanklager)', H_d staat voor 'hypothese van de *defence* (verdediging)' en E staat voor *evidence* (bewijsmateriaal).
We willen nu onderzoeken in hoeverre het optreden van gebeurtenis E de kansen op H_p en H_d beïnvloedt. Uit (3) volgt onmiddellijk de zogenaamde *odds vorm* van de regel van Bayes:

$$\frac{P(H_p|E)}{P(H_d|E)} = \frac{P(E|H_p)}{P(E|H_d)} \times \frac{P(H_p)}{P(H_d)} \quad (5)$$

en dit is de vorm waarin de regel van Bayes in juridische zaken doorgaans wordt gebruikt. De reden voor de naam *odds vorm* is dat het quotiënt van de kans op A en de kans op het complement van A ook wel de *odds* van A wordt genoemd.
Het linkerlid van (5) geeft het quotiënt van de kansen op H_p en H_d gegeven de nieuwe informatie E; de zogeheten *posterior odds*. De laatste factor in het rechterlid geeft datzelfde quotiënt, maar dan zonder informatie over E: de *prior odds*. De breuk

$$\frac{P(E|H_p)}{P(E|H_d)}$$

die daar tussenin staat wordt *aannemelijkheidsquotiënt* (AQ) genoemd. We kunnen (5) dus verkort opschrijven als

posterior odds = AQ × *prior odds* (6)

De posterior odds bepalen nu de kans dat Jan de Vries de dader is, na het zien van het bewijsmateriaal E. Het is duidelijk dat deze posterior odds hoger worden als de prior odds of het aannemelijkheidsquotiënt hoger worden. Om deze posterior odds uit te kunnen rekenen gaan we eerst AQ bepalen. Welnu, als we conditioneren op H_p, dan weten we dat Jan de Vries de dader was. De kans dat hij profiel A heeft is p_A, en de kans dat we dat profiel dan vervolgens ook aantreffen op de plaats van het misdrijf is natuurlijk 1, want we gaan er van uit dat hij de moordenaar is. Dit levert $P(E|H_p) = p_A$.
Als Jan de Vries het niet gedaan heeft, dan is de kans dat we profiel A bij hem aantreffen nog steeds p_A. De kans dat we op de plek van het misdrijf ook profiel A aantreffen, is nu de kans dat de onbekende moordenaar profiel A heeft, en die kans is ook p_A. We concluderen dat $P(E|H_d) = p_A^2$, en dus dat $AQ = 1/p_A$.
Nu moeten we ook de prior odds bepalen, maar... kan dat eigenlijk wel zonder verdere aannames? Nee, om $P(H_p)$ en $P(H_d)$ te kunnen bepalen, moeten we het model verder uitbreiden. We kunnen bijvoorbeeld aannemen dat er n mogelijke daders van de moord zijn, en dat zonder het bewijsmateriaal E al deze n potentiële daders dezelfde kans hebben om de moordenaar te zijn. Dit leidt tot $P(H_p) = 1/n$ en $P(H_d) = 1 - 1/n$, en in dit geval zijn de posterior odds dan gelijk aan

$$\textit{posterior odds} = \frac{1}{p_A(n-1)} \quad (7)$$

Maar meestal is het natuurlijk niet zo dat er een duidelijke groep van n potentiële verdachten is, en is het zeer onduidelijk hoe we de prior odds een zinvolle waarde kunnen geven. Deze waarde wordt dan ook meestal geïnterpreteerd als een *persoonlijke* inschatting (van bijvoorbeeld de rechter) van de kans dat iemand de dader was. In de praktijk is er vaak aanleiding, buiten het DNA-onderzoek om, om een bepaalde persoon te verdenken. Op basis van deze andere aanwijzingen kan de rechter de priori kans dat de verdachte het werkelijk heeft gedaan variabel houden, vaak genoteerd als $P(H_p) = \delta$. Onder deze aanname krijgen we

$$\textit{posterior odds} = \frac{\delta}{p_A(1-\delta)} \quad (8)$$

Stephen D. Unwin

waarbij we formule (7) terugvinden door $\delta = 1/n$ in te vullen.
De formules (7) en (8) kunnen we eenvoudig interpreteren. Als $p_A = 1$, dan heeft iedereen DNA-profiel A en levert E dus geen enkele nieuwe informatie op. Dat klopt met de formule, want in dat geval zijn de posterior odds gelijk aan de prior odds. Hoe kleiner p_A wordt, hoe beroerder het eruit ziet voor Jan de Vries. Ook dat klopt, want als A een uiterst zeldzaam profiel is, dan is het feit dat zowel Jan de Vries en de moordenaar dat profiel hebben zeer belastend voor Jan de Vries. Verder zien we dat de posterior odds sterk afhangen van de prior odds; als je de laatste heel hoog kiest, dan zullen de posterior odds ook hoog worden.
Op deze manier bezien is deze toepassing van de regel van Bayes een methodiek om de beoordeling van een verdachte aan te passen zodra er nieuw bewijsmateriaal is. Maar hoe je het ook wendt of keert, het uiteindelijke antwoord, de posterior odds, zullen in sterke mate afhangen van de gekozen prior odds, en deze prior odds zijn persoonlijke inschattingen.
In verschillende publicaties heb ik - samen met Marjan Sjerps van het Forensisch Instituut - gewaarschuwd tegen deze willekeur.[2]
Gaat het nu echt zo in de rechtszaal? Vaak wordt alleen AQ gebruikt als indicatie van de kans op schuld, maar als we deze AQ niet in combinatie met de prior odds beschouwen, geeft dat maar gedeeltelijke informatie over de posterior odds. Voor een bespreking van een aantal echte zaken verwijs ik naar het boek van Bernard Robertson en G.A. Vignaux, *Interpreting evidence, evaluating forensic science in the courtroom*, Wiley (1995).

De kans dat God bestaat?!

In 2003 verscheen het boek *The probability of God*, met als ondertitel *A simple calculation that proves the ultimate truth*. De auteur was Stephen D. Unwin, een Amerikaanse natuurkundige. Zijn conclusie luidde dat de kans op God 66% is, en dat hij dat heus had uitgerekend met de regel van Bayes.

Uiteraard is dit niet serieus te nemen, maar dat deerde de verkoopcijfers allerminst. Ik wil hier, ter vermaak, kort ingaan op de berekeningen van Unwin. Ik ga hier niet verder in op de theologische aspecten van zijn kijk op de zaak die in mijn ogen nog lachwekkender zijn dan de interpretatie van zijn wiskundige berekeningen.
Unwin gebruikt eveneens de odds vorm (5) van de regel van Bayes, hier geformuleerd als

$$\frac{P(G|E)}{P(G^C|E)}=\frac{P(E|G)}{P(E|G^C)}\times\frac{P(G)}{P(G^C)} \tag{9}$$

waarin G de gebeurtenis is dat God bestaat, en waarin E diverse feitelijkheden van de wereld beslaan, daar kom ik zo op terug. Als prior odds $P(G)/P(G^C)$ neemt Unwin de waarde 1, hetgeen overeenkomt met de aanname dat de a priori kans op God 50% bedraagt. Volgens Unwin is dat de wiskundige vertaling van 'ik weet het niet'.
Welnu, vervolgens komt het eerste bewijsmateriaal. Allereerst neemt Unwin voor E het feit dat we in de wereld het onderscheid kennen tussen goed en kwaad. Het AQ dat hier bij hoort krijgt van Unwin dan vervolgens de waarde 10, vraag me niet waarom. Wanneer je nu vervolgens formule (9) toepast, dan vinden we dat

$$\frac{P(G|E)}{P(G^C|E)}=10 \tag{10}$$

hetgeen leidt tot $P(G|E)=0{,}91$; immers $P(G|E)+P(G^C|E)=1$. Op bladzijde 109 van zijn boek becommentarieert Unwin dit met 'A good start for God!' Tja.
Vervolgens herhaalt Unwin dit programma, met steeds nieuwe gebeurtenissen E, en elke keer de uitkomst van de vorige berekening gebruikend als input voor zijn volgende. De gebeurtenissen die zijn bewijsmateriaal vormen zijn onder meer, met tussen haakjes het AQ dat Unwin eraan toekent:
- Het bestaan van menselijk kwaad (AQ = 0,5),
- Het bestaan van natuurlijk kwaad (AQ = 0,1),
- Het bestaan van wonderen (AQ = 2),
en zo nog een paar. Aan het eind van zijn berekening komt hij dan uit of de inmiddels fameuze 66%.
Het moge duidelijk zijn: dit getal van 66% is volkomen betekenisloos, omdat het verkregen is door louter subjectieve input van Unwin. Geen van de getallen die Unwin noemt, betekent ook echt iets; dat geldt voor zowel zijn prior odds als voor al zijn AQ-waardes. Een atheïst die zeker weet dat God niet bestaat, zal beginnen met prior odds gelijk aan 0, en welke waardes voor AQ je daarna ook neemt, de posterior odds zullen altijd 0 blijven. Kortom, de uitkomst van Unwins berekening is gebaseerd op zijn eigen vooronderstellingen, en dat betekent dat de claim dat hij de kans op het bestaan van God uitrekent eigenlijk alleen maar lachwekkend is.
Dit voorbeeld toont aan dat de toepassing van wiskunde zo zijn grenzen heeft. De wiskunde zelf, ja daar is weinig op af te dingen. De vraag is of de toepassing nog ergens op slaat, of het gebruik van wiskunde in het onderhavige geval eigenlijk wel iets betekent. In dit geval lijkt me de conclusie overduidelijk.
Dit hoeft je er natuurlijk niet van te weerhouden om te rekenen met de regel van Bayes in gevallen waarin het wel zinvol is.

De regel van Bayes in een gokspelletje

Voor de liefhebbers nog een laatste voorbeeld. Stel we hebben drie kaarten. De eerste kaart is aan twee zijden rood, de tweede kaart is aan twee zijden zwart en de derde kaart is aan één kant rood en aan één kant zwart. We doen de drie kaarten in een hoge hoed, en trekken er blind een kaart uit die we vervolgens op tafel leggen. De (zichtbare) bovenzijde van deze getrokken kaart blijkt rood te zijn. Wat is nu de kans dat de (onzichtbare) onderzijde zwart is?
Mijn ervaring is dat veel studenten denken dat die kans $\frac{1}{2}$ is, omdat er twee mogelijkheden zijn: de getrokken kaart is aan twee kanten rood, of aan één kant rood. De regel van Bayes vertelt ons het correcte antwoord, als volgt.
We schrijven RR voor de gebeurtenis dat de getrokken kaart aan twee kanten rood is, ZZ voor de gebeurtenis dat deze aan twee kanten zwart is, en RZ voor de gebeurtenis dat het de rood-zwarte kaart is. Verder schrijven we A voor de gebeurtenis dat de zichtbare kant van de getrokken kaart rood is. We zijn geïnteresseerd in de conditionele kans $P(RZ|A)$. Met behulp van formule (3) vinden we dan

$$\begin{aligned}P(RZ|A)&=\frac{P(A|RZ)\times P(RZ)}{P(A)}\\&=\frac{P(A|RZ)\times P(RZ)}{P(A|RR)\times P(RR)+P(A|RZ)\times P(RZ)+P(A|ZZ)\times P(ZZ)}\\&=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}}\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Het correcte antwoord is dus $\frac{1}{3}$. Zie je een mogelijkheid om hiermee geld te verdienen?

Noten

[1] Zie Stephen D. Unwin, The probability of God, Crown Forum (2003).
[2] Zie bijvoorbeeld Ronald Meester en Marjan Sjerps, The evidential value in the DNA database controversy and the two-stain problem, Biometrics, pp. 727-732 (2003); Ronald Meester en Marjan Sjerps, Why the effect of prior odds should accompany the likelihood ratio when reporting DNA evidence, Law, Probability and Risk, pp. 51-62 (2004), en de referenties in die twee artikelen.

Over de auteur

Ronald Meester is hoogleraar in de waarschijnlijkheidsrekening, en is verbonden aan de Vrije Universiteit Amsterdam (VUA). Hij doet wiskundig onderzoek variërend van zeer abstracte tot uiterst toegepaste wiskunde. Hij was betrokken bij het geruchtmakende proces tegen de verpleegster Lucy de B. waarbij kansrekening en statistiek een voorname rol speelden. Uiteraard doceert hij kansrekening en andere vakken aan de VUA.
E-mailadres: rmeester@few.vu.nl

LAAT ZIEN DAT ...

Bewijzen in het vmbo

[Sieb Kemme]

Inleiding

Formele wiskundige bewijzen staan niet op het programma van de wiskunde in het vmbo. En dat is maar goed ook. Toch is de kunst van het leveren van een deugdelijke onderbouwing van je beweringen één van de fundamenten van de wiskunde. Het zichtbare beginpunt hiervan ligt bij Euclides en misschien nog wel ver daarvoor. Euclides richtte een min of meer formeel deductief bouwwerk op met zijn *Elementen*. Maar dit bouwwerk is het eindpunt van het wiskundige denkwerk. Het denkwerk zelf komen we niet te zien. Dat denkwerk is een combinatie van gezond verstand en het hanteren van de juiste (wiskundige) middelen. De volgende voorbeelden en gedachte-experimenten laten zien hoe we dat wiskundige denkproces op gang zouden kunnen brengen in het vmbo.
Een waarschuwing vooraf. In het volgende laat ik me niet uit over het niveau en de haalbaarheid van de voorbeelden. Misschien zijn een aantal te hoog gegrepen voor de basisberoepsgerichte leerweg. De manier van werken staat bij de voorbeelden voorop. Als ervaren docent bent u zeker in staat de voorbeelden door betere te vervangen.

Voorbeeld 1 - MP3

Zie figuur 1. Je koopt een MP3-speler voor € 79,00. Het is een aanbieding met 20% korting.
Maar daar komt nog 19% btw overheen.
Wat is voordeliger: eerst de 20% korting en daarna de btw zodat je minder btw hoeft te betalen? Of eerst de btw en daarna de korting, zodat je meer korting krijgt?
» Laat zien dat het niet uitmaakt in dit geval.
» Laat ook zien waarom dit altijd zo is.

Bewijzen? Wat is dat?

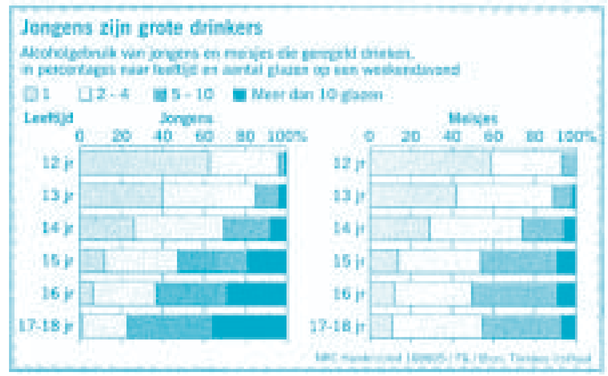
Wie zich waagt aan het bewijzen in het vmbo, kan het ‘bewijzen’ maar beter niet al te letterlijk opvatten zoals we dat doorgaans in de wiskunde gewend zijn. Er is natuurlijk geen sprake van dat we de vmbo-leerling kunnen verleiden tot het opschrijven van een rij formele argumenten, in een strikt logische samenhang en volgorde.
Maar de essentie van het bewijzen kunnen ze zich misschien wel eigen maken.
Die essentie is: de waarheid van een bewering beargumenteren op basis van vaststaande feiten en argumenten.
Of vanuit het negatieve: niet zonder meer iets als waarheid accepteren op basis van een vooroordeel, of omdat je vriendje, je ouders, je docenten dat zeggen.
Het gaat dus telkens om het kunnen formuleren van steekhoudende argumenten die in de situatie zelf besloten liggen en niet zijn afgeleid uit je persoonlijke omstandigheden.

Toegepast op het voorbeeld

In het voorbeeld worden twee bewijzen gevraagd: één voor dit speciale geval en één voor de algemene situatie. Het eerste bewijs kan bestaan uit de berekening voor deze situatie: eerst 20% eraf en dan 19% erbij, daarna eerst 19% erbij gevolgd door 20% eraf. Bij het tweede bewijs ontkom je niet aan een andere manier van rekenen met procenten: 20% eraf is hetzelfde als vermenigvuldigen met 0,80; 19% erbij hetzelfde als vermenigvuldigen met 1,19. Gevolgd door het argument dat de volgorde van vermenigvuldigen er niet toe doet.

Bewust is gekozen voor de formulering: ‘Laat zien dat...’ en niet voor de veel spannender vraagvorm: ‘Zou het wat uitmaken als je...’ En ook niet voor de gebruikelijke opzet waarin die vraagvorm wordt gevolgd door ‘Leg uit waarom dat zo is.’ Het nadeel van deze laatste opzet is dat leerlingen al dik tevreden zijn als ze een antwoord hebben weten te produceren op de onderzoeksvraag. Ze hebben uitgezocht wat het geval is en hebben geen enkele behoefte meer daar nog iets aan toe te voegen. ‘Laat

FIGUUR 1



FIGUUR 2

zien dat...' laat ze geen ruimte om het erbij te laten zitten. Wiskunde is nu eenmaal zo af en toe een dwangmatig vak.

Voorbeeld 2 - Jongens zijn grote drinkers

Actievoerders tegen alcoholmisbruik zijn teleurgesteld. Hun acties blijken weinig effect te hebben op jongeren. Het Trimbos-instituut verspreidde in augustus 2005 de grafieken uit figuur 2 in de landelijke pers.

» Hoeveel procent van de 12-jarige jongens drinkt 2-4 glazen op een stapavond?
» En hoeveel procent is dat bij de 12-jarige meisjes?
» Hoe zijn die percentages bij 14-jarige jongens en bij 14-jarige meisjes?
» Beschrijf het gebruik van meer dan 10 glazen op een stapavond voor jongens en voor meisjes als ze ouder worden.
» Laat met cijfers zien dat meisjes verstandiger worden in hun alcoholgebruik als ze ouder worden.

Voorbeeld 3 - Donder en bliksem

Je ziet een bliksemflits. Je begint te tellen. Na 9 tellen hoor je de klappen van de donder. Gelukkig, het onweer is nog zo'n 3 kilometer ver weg.
De vuistregel is: het aantal seconden tussen bliksem en donder gedeeld door 3, is de afstand in kilometers. Geluid legt in 1 seconde 343 meter af.
» Laat met een berekening zien dat de vuistregel juist is.

Voorbeeld 4 - Deelbaar door 9?

Hoe weet je dat 12345 deelbaar is door 3? Tel de cijfers bij elkaar op: 15. Dat getal is deelbaar door 3, dan is ook 12345 deelbaar door 3. Laat nu met een redenering zien: 'Een getal is deelbaar door 9, als de som van de cijfers deelbaar is door 9.'

Voorbeeld 5 - De som van de hoeken in een driehoek

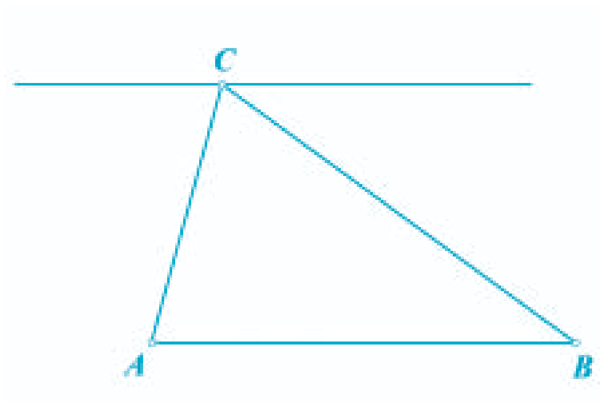
Zie figuur 3. De lijn door C is evenwijdig met AB.
» Laat in de tekening zien welke hoeken aan elkaar gelijk zijn. Denk aan F- en Z- hoeken.
» Laat met een redenering zien dat de som van de hoeken in een driehoek 180° is.

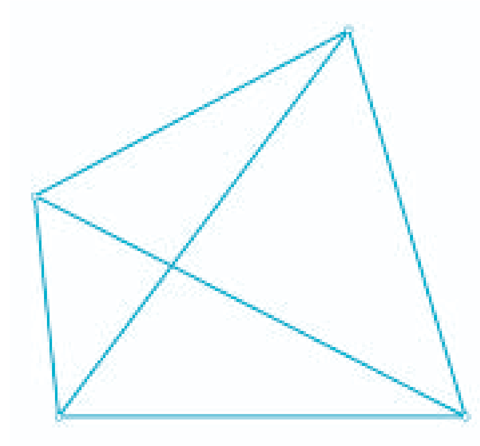
Laat zien met...

In de voorgaande twee voorbeelden wordt het middel genoemd waarmee je het bewijs moet leveren. Nu is er geen ontkomen meer aan. Je moet met cijfers laten zien dat... Je moet met een berekening laten zien dat... Dit is de dwangmatigheid ten top! Hoe is dat nog te combineren met de gangbare opvatting over zelfontdekkend leren?
Helaas kan dit niet anders. Het leveren van een bewijs is geen vrijblijvende zaak. Dat geldt voor de rechtszaal en dat geldt voor de wiskunde. Het bewijsmiddel moet deugen en algemeen geaccepteerd zijn. Voor de rechtszaal is de wet de toetssteen of het bewijsmiddel deugdelijk is. Deugdelijke bewijsmiddelen in de wiskunde zijn: betrouwbaar cijfermateriaal, nette tekeningen, berekeningen, redeneringen. Argumenten als: 'Dat zie je zo', 'Dat zal dan wel altijd zo zijn', 'Dat zal wel zo zijn omdat u dat zegt' worden niet geaccepteerd als deugdelijk bewijsmiddel.
Met de opdracht 'Laat zien met...' krijgt de leerling het bewijsmiddel aangereikt en kan die vertrouwd raken met de eis dat bij een bewijs een deugdelijke bewijsmiddel hoort. Gelukkig blijft er nog genoeg ruimte over voor de eigen creativiteit van de leerling. In de opdracht 'Laat met een redenering zien dat...' kan de leerling op zijn eigen manier die redenering geven.

Voorbeeld 6 - Het plankje van Jazir

Jazir heeft bij techniek een rechthoekig plankje gezaagd. De hoeken moeten precies recht zijn.
'Meet de diagonalen maar na,' zegt de leraar van Jazir, 'als die gelijk zijn, zijn de hoeken ook precies recht.'
» Laat zien dat dit niet zo'n goed advies is van de leraar van Jazir.





FIGUUR 3

FIGUUR 4

Het tegenvoorbeeld

Door de formulering wordt de leerling gedwongen naar een tegenvoorbeeld te zoeken.
Hij weet al dat het mis kan gaan. Een meer open, op onderzoek gerichte formulering, zou door de complexere logica van de situatie tot hopeloze verwarring kunnen leiden. De diagonalen van een rechthoek zijn natuurlijk even lang. Maar hier hebben we met het logisch omgekeerde te maken: niet elke vierhoek met even lange diagonalen is een rechthoek. Deze opdracht laat zien dat een tegenvoorbeeld een goed bewijsmiddel kan zijn.

Van het specifieke naar het algemenere

Voorbeeld 7 - € 10,00 korting

Elektronicazaak *Foton* geeft in de Lichtweek € 10,00 korting op alle MP3-spelers.
» Laat zien dat het nu wel uitmaakt of je eerst de korting neemt en daarna de btw van 19%.
» Laat zien dat het altijd voordeliger is om eerst de korting te nemen.

Ook hier volstaat het tegenvoorbeeld als bewijsmiddel. De situatie is nu meer rechttoe-rechtaan en laat dus een wat ruimere formulering toe.
Bij de tweede vraag is alleen een redenering het juiste bewijsmiddel. Maar die redenering kan wel op gang worden gebracht door het voorbeeld uit de eerste vraag, waaruit blijkt dat het verschil in volgorde een verschil van € 1,90 oplevert.
De overgang van één specifiek voorbeeld naar een algemenere dwingt bijna altijd tot het opzetten van een redenering. Vaak laat die redenering zich echter afleiden uit het voorbeeld zelf. Dan kun je de werkwijze in het voorbeeld omzetten naar het algemene geval.
In het geval *Foton* zou dat de volgende redenering kunnen opleveren:

- eerst € 10,00 eraf en daarna de 19% btw erbij:
$(\textit{bedrag} - 10) \times 1{,}19 = 1{,}19 \times \textit{bedrag} - 11{,}9$
- eerst de 19% btw erbij en daarna € 10,00 eraf:
$\textit{bedrag} \times 1{,}19 - 10$

Op weg naar een leerlijn bewijzen?

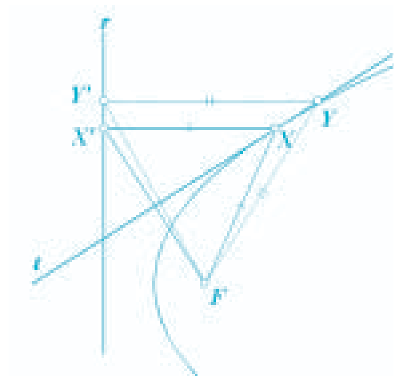
Waarom-vragen en Laat-zien-sommen zijn niet de meest favoriete opdrachten voor vmbo-leerlingen. Ze zijn liever productief met berekenen, meten en tekenen. Toch hoort dit type opdrachten bij de essentie van wiskunde. Daar een aparte leerlijn van maken in het vmbo is waarschijnlijk teveel van het goede. Beter is van tijd tot tijd dit soort opdrachten er tussendoor te doen. Geef die opdrachten dan wel voldoende aandacht. De kracht van het juiste argument moet voor leerlingen duidelijk zichtbaar worden. Zet verschillende argumenten naast elkaar, ook de verkeerde. Wees eens streng en accepteer niet langer het 'Dat zie je zo' argument. Misschien dat sommige leerlingen het idee dan oppakken dat ze niet alles voor zoete koek hoeven aan te nemen, maar dat ze met hun gezonde verstand en de juiste feiten en argumenten dichter bij de waarheid kunnen komen.

Over de auteur

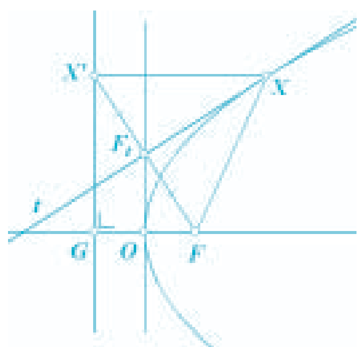
Sieb Kemme werkte jarenlang als vakdidacticus wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen en was daarna als projectleider en uitgever betrokken bij de ontwikkeling van een aantal schoolmethodes voor wiskunde en de natuurwetenschappen.
E-mailadres: skemme@educadbv.nl

ENKELE MOOIE BEWIJZEN IN DE MEETKUNDE

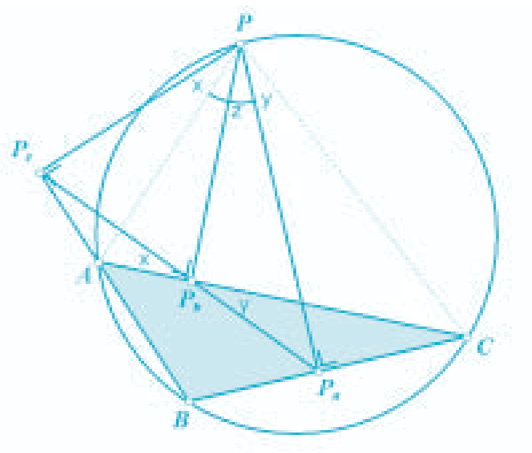
[Dick Klingens]



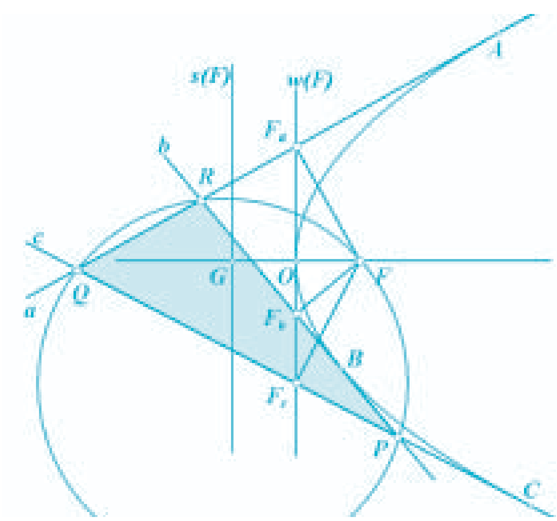
FIGUUR 1



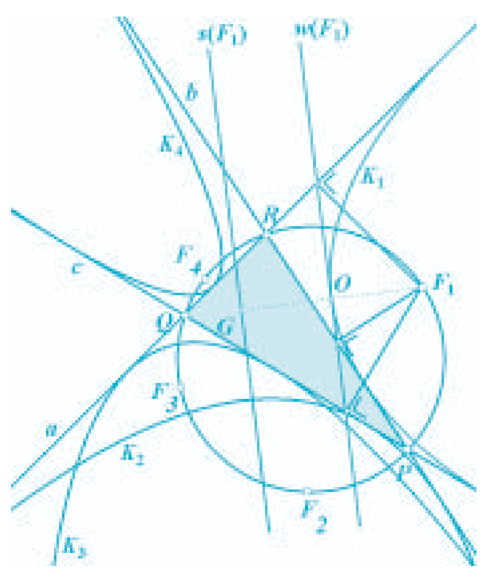
FIGUUR 2



FIGUUR 3



FIGUUR 4



FIGUUR 5

1. Inleiding

In de eindtermen van het huidige eindexamenprogramma voor Voortgezette Meetkunde (van vwo B12) vinden we onder meer de onderwerpen 'koordenvierhoeken' en 'kegelsneden' (daar meestal gedefinieerd als de conflictlijn van een punt en een rechte lijn c.q. een cirkel).
We zullen in de volgende paragrafen laten zien dat we met die kennis (onder meer) de volgende stelling eenvoudig – en mooi – kunnen bewijzen.

Stelling 1. *Er is een parabool die raakt aan vier elkaar snijdende rechte lijnen.*

In de titel wordt gesproken van mooie bewijzen. Nu is het begrip 'mooi' zeker subjectief. Het bewijs van stelling 1 (en van de andere stellingen in dit artikel) is *daarom* mooi omdat de auteur van dit artikel dat vindt. En hij hoopt daarbij dat de lezer aan het einde van dit artikel dezelfde mening is toegedaan.

2. Over de parabool

Allereerst maar de gebruikelijke definitie: een parabool is de verzameling van alle punten X die gelijke afstanden hebben tot een gegeven punt F, het brandpunt, en tot een gegeven rechte lijn r, de richtlijn. Uit deze definitie is onmiddellijk duidelijk dat zo'n punt X dan ligt op de middelloodlijn t van het lijnstuk FX', waarbij X' de projectie is van X op de lijn r (zie figuur 1). Of ook: het spiegelbeeld X' van het punt F in de lijn t ligt op de lijn r, en ook: X ligt op de conflictlijn van de lijn r en het punt F.
Stel nu dat Y een tweede gemeenschappelijk punt is van t en de parabool. De lijn t is dan ook middelloodlijn van FY'; en dat kan alleen maar als de punten X en Y samenvallen: de lijn t raakt in het punt X aan de parabool.

Voor het punt F_t, het midden van het lijnstuk FX', bewijzen we (zie figuur 2):

Stelling 2a. *De projectie F_t van het brandpunt F op een raaklijn t aan een parabool ligt op de topraaklijn aan die parabool.*

De topraaklijn van een parabool is de middelloodlijn van het lijnstuk FG, waarbij G de projectie is van F op r. Het midden van FG geven we aan met O, zodat $OF = OG$. Hieruit is direct duidelijk dat O ligt op de parabool die bepaald is door F en r.
Wegens $FF_t = F_tX'$ en $FO = OG$ is de lijn F_tO middenparallel van driehoek $FX'G$, zodat $F_tO \mathbin{//} X'G \perp FG$.
En dit geldt voor alle raaklijnen t. We kunnen daarom stelling 2a ook formuleren als:

Stelling 2b. *De topraaklijn van een parabool is de meetkundige plaats van de projecties van het brandpunt op de raaklijnen aan die parabool.*

(Het tweede deel van het bewijs van stelling 2b, namelijk dat elk punt van de topraaklijn de projectie is van het brandpunt op een raaklijn aan de parabool, laten we aan de lezer.)

Merk verder op dat de richtlijn r van de parabool opgevat kan worden als het beeld van de topraaklijn bij vermenigvuldiging met factor 2 en centrum F. We maken daarvan later gebruik!

3. De Wallace-lijn van een punt

In figuur 3 is P een punt van de omcirkel (omgeschreven cirkel) van driehoek ABC. De punten P_a, P_b, P_c zijn de projecties van P op de (zo nodig verlengde) zijden van die driehoek.
We hebben nu een viertal koordenvierhoeken waarin we de eigenschap van gelijke omtrekshoeken op gelijke koorden (stelling van de omtrekshoek) kunnen gebruiken.[1]
(1) In koordenvierhoek AP_bPP_c: $AP_bP_c = APP_c = x$ (via koorde AP_c);
(2) in koordenvierhoek CPP_bP_a: $CP_bP_a = CPP_a = y$ (via koorde CP_a).
Stellen we nu $APP_a = z$, dan hebben we ook:
(3) in koordenvierhoek BP_aPP_c: $x + z = 180° - B$ (overstaande hoeken in die koordenvierhoek);
(4) in koordenvierhoek $ABCP$: $y + z = 180° - B$ (overstaande hoeken in die koordenvierhoek).
Zodat $x = y$.
Met andere woorden: de punten P_a, P_b, P_c liggen op dezelfde rechte lijn.
Deze lijn wordt in de (wat oudere) wiskundeliteratuur meestal de *Simson-lijn* van het punt P bij driehoek ABC genoemd.
Nu is het zo dat *Robert Simson* (1687-1768; hoogleraar in de wiskunde aan de universiteit van Glasgow), naar wie de lijn genoemd is, niets van doen heeft gehad met deze lijn. Het was een andere Schot, *William Wallace* (1768-1843; hoogleraar aan de universiteit van Edinburgh), die in 1797 voor het eerst melding heeft gemaakt van bedoelde eigenschap.
We zullen de lijn daarom in hetgeen volgt *Wallace-lijn* noemen.

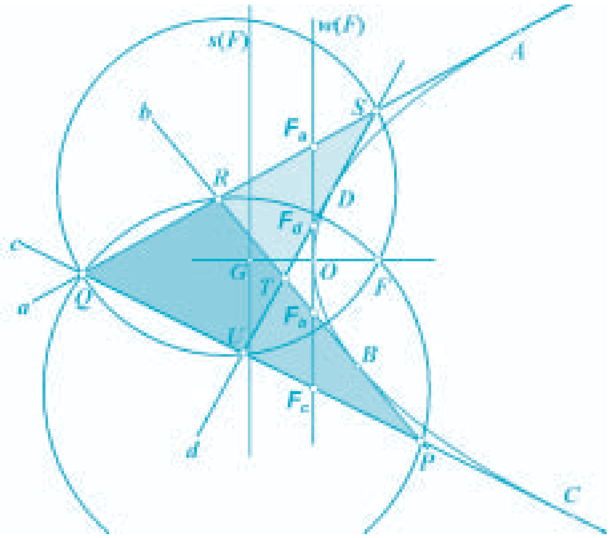
We hebben dus bewezen:

Stelling 3.1. *De projecties van een punt van de omcirkel van een driehoek op de zijden van die driehoek liggen op dezelfde rechte lijn, zijnde de Wallace-lijn van dat punt bij die driehoek.*

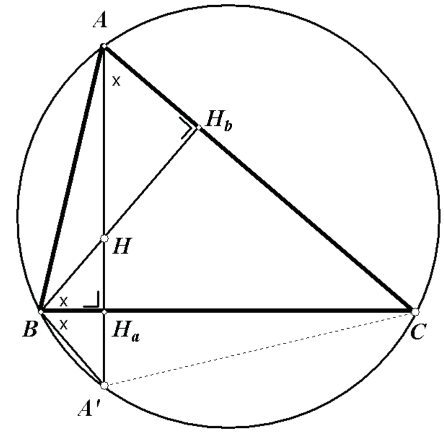
Ook de omgekeerde stelling geldt:

Stelling 3.2. *Liggen de voetpunten van de loodlijnen uit een punt neergelaten op de zijden van een driehoek, op een rechte lijn, dan ligt dat punt op de omcirkel van die driehoek.*

In koordenvierhoek BP_aPP_c is dan namelijk $x + z = 180° - B$. Omdat nu $x = y$ is, geldt in vierhoek $ABCP$: $y + z = x + z = 180° - B$, waaruit volgt dat $ABCP$ een koordenvierhoek is; met andere woorden, het punt P ligt op de omcirkel van driehoek ABC.



FIGUUR 6



FIGUUR 7

4. Raaklijnen aan een parabool

De punten F_a, F_b, F_c zijn de projecties van het brandpunt F op drie raaklijnen a, b, c aan een parabool (de raakpunten aan de parabool zijn A, B, C); zie figuur 4, waarin de lijn $s(F)$ de richtlijn van de parabool is. Volgens stelling 2 liggen deze punten op dezelfde rechte lijn, de topraaklijn van die parabool. Deze topraaklijn is de Wallace-lijn, in de figuur aangegeven met $w(F)$, van het punt F bij de driehoek PQR die gevormd wordt door de drie raaklijnen. Het brandpunt F van de parabool ligt dan, volgens stelling 3.2, op de omcirkel van driehoek PQR. Overigens, dit is een projectieve eigenschap van kegelsneden. Ook zonder gebruik te maken van de Wallace-lijn kan bewezen worden dat het brandpunt van een parabool die raakt aan de zijden van een driehoek, ligt op de omgeschreven cirkel van die driehoek (zie daarvoor bijvoorbeeld [9]).
We merken verder op dat we (omgekeerd) bij elk punt F van de omcirkel van een driehoek PQR – nu gevormd door drie elkaar snijdende lijnen a, b, c – een parabool met brandpunt F kunnen vinden die aan die lijnen raakt. De lezer kan dit zelf nagaan door, uitgaande van driehoek PQR en een punt F van de omcirkel, de bij F_a, F_b, F_c (de voetpunten van F op de Wallace-lijn) behorende raakpunten van de parabool te construeren.

Zo'n parabool noemen we de *Wallace-parabool* van F bij driehoek PQR. In figuur 5 zijn van de punten F_i (i = 1, ..., 4) de Wallace-parabolen K_i weergegeven. Van K_1 zijn ook de topraaklijn $w(F_1)$ – dus de Wallace-lijn van F_1 bij driehoek PQR – en de richtlijn $s(F_1)$ getekend.

Opmerking. De richtlijn van een Wallace-parabool heet *Steiner-lijn* van het punt F (bij driehoek PQR). Het is de lijn $s(F)$ die evenwijdig is met $w(F)$, op een twee keer zo grote afstand van F als de lijn $w(F)$ en aan dezelfde kant van F als $w(F)$. We zagen dat al eerder.

We komen nu aan het bewijs van stelling 1.
We gaan daarbij dus uit van vier elkaar snijdende lijnen a, b, c, d (met snijpunten P, Q, R, S, T, U); zie figuur 6.
De omcirkels van (bijvoorbeeld) de driehoeken PQR en QSU snijden elkaar behalve in Q ook in een punt F.
De lijnen a en c zijn de dragers van twee zijden van die driehoeken. De projecties van F op die lijnen zijn F_a en F_c. De Wallace-lijnen van het punt F bij beide driehoeken vallen dus samen, zodat F_a, F_b, F_c, F_d op dezelfde rechte lijn liggen.
De Wallace-parabool van F bij driehoek PQR valt daardoor samen met de Wallace-parabool van F bij driehoek QSU.
Beide driehoeken hebben dus precies één gemeenschappelijke Wallace-parabool.

En daarmee is stelling 1 bewezen: er is inderdaad een parabool die raakt aan vier elkaar snijdende rechte lijnen. Mooi, toch?

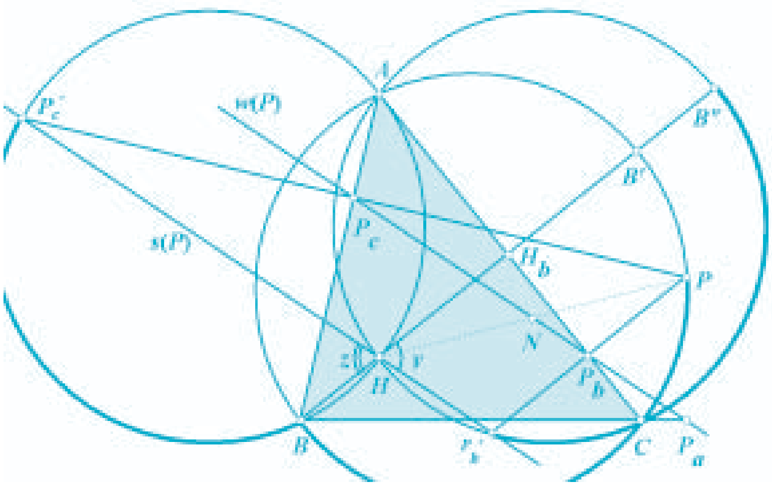
5. Over de Steiner-lijn

Als we de Steiner-lijn, die richtlijn is van de Wallace-parabool in de configuratie van stelling 1 (dus in figuur 6), bekijken, dan wordt het – wederom naar de mening van de auteur – nog mooier. Op die lijn liggen namelijk – naast de spiegelbeelden van het punt F in de lijnen a, b, c, d – vier andere bijzondere punten.

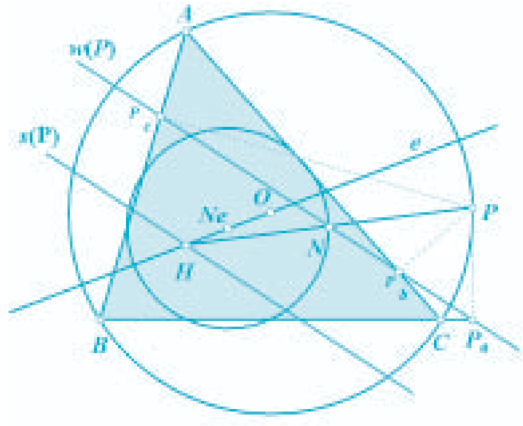
We bewijzen allereerst, voor de volledigheid, een bekende eigenschap van het hoogtepunt in een driehoek.

Hulpstelling. *Het spiegelbeeld van het hoogtepunt in een zijde van een driehoek ligt op de omcirkel van die driehoek.*

De hoogtelijn uit A snijdt de zijde BC in H_a en de omcirkel in A'. De hoogtelijn uit B snijdt de zijde CA in H_b (zie figuur 7).



FIGUUR 8



FIGUUR 9

Als we kunnen aantonen dat $HH_a = H_aA'$, dan is A' het spiegelbeeld van H in BC.
Nu is:
(1) $H_aBH = H_bAH$ (de driehoeken H_aBH en H_bAH hebben reeds twee gelijke hoeken);
(2) $A'AC = \frac{1}{2}$ bg($A'C$) = $A'BC$ (omtrekshoeken op dezelfde boog).
Uit (1) en (2) volgt dan $A'BH_a = HBH_a$, waardoor BH_a hoogtelijn en bissectrice is in driehoek $A'BH$. En hieruit volgt het gestelde direct.

En nu kunnen we bewijzen:

Stelling 4. *De Steiner-lijn van een punt bij een driehoek gaat door het hoogtepunt van die driehoek.*

Zie figuur 8. Spiegeling van de omcirkel van ABC in de lijnen CA en AB geeft de punten P_b' en P_c' als beeldpunten van P op de bijbehorende spiegelbeelden van de omcirkel; daarbij geldt dan: $PP_b = P_bP_b'$ en $PP_c = P_cP_c'$.
We weten verder, volgens bovenstaande hulpstelling, dat de beide beelden van de omcirkel door het hoogtepunt H van driehoek ABC gaan.
Willen de punten P_b', P_c' en H op dezelfde rechte lijn liggen, dan moeten we aantonen dat uit $y = P_b'HB''$ en $z = P_c'HB$ volgt dat $y = z$.
Vanwege de genoemde spiegelingen zijn de – op de cirkels met gelijke straal gelegen – bogen $B''CP_b'$, BCP en BP_c' aan elkaar gelijk, zodat inderdaad $y = z$ (omtrekshoeken).
De lijn $P_b'P_c'$ gaat dus door het punt H. Maar deze lijn is het beeld van de Wallace-lijn $P_bP_c \equiv w(P)$ bij een vermenigvuldiging met factor 2 en centrum P (zie driehoek $PP_b'P_c'$). De door H gaande lijn $P_b'P_c'$ is dus de Steiner-lijn van P bij driehoek ABC (zie de opmerking aan het einde van paragraaf 4).

En dit geeft ons ook, vanwege die vermenigvuldiging met factor 2 en centrum P:

Stelling 5. *Het midden N van het lijnstuk HP ligt op de Wallace-lijn van P bij driehoek ABC.*

Een gevolg van stelling 5 is dat punt N op de negenpuntscirkel (Feuerbach-cirkel; middelpunt Ne) van ABC ligt; zie figuur 9. En daarmee is er ook een (zeker) verband tussen de zogenoemde Euler-lijn van driehoek ABC en de Wallace-lijnen van de punten van de omcirkel.[2]

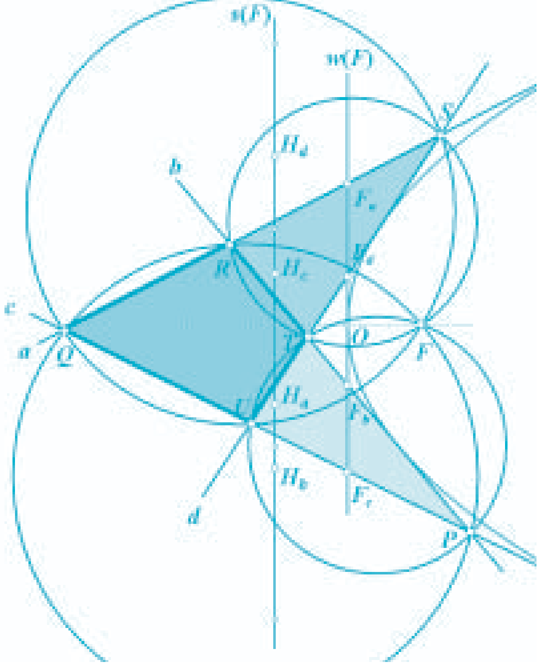
Dan nu terug naar de configuratie van stelling 1.

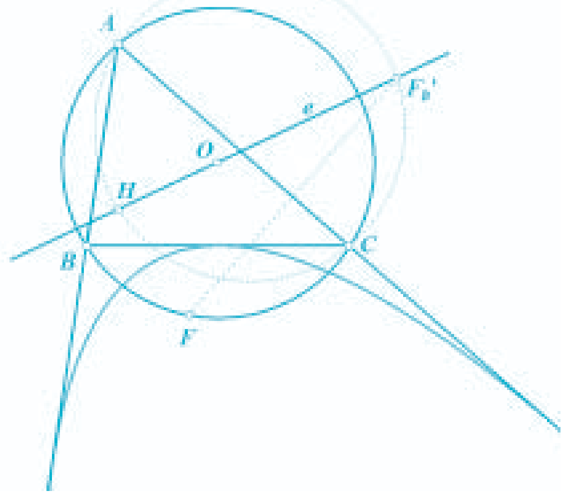
De lijnen a, b, c, d hebben P, Q, R, S, T, U als snijpunten; zie figuur 10.
We hebben dan de vier driehoeken PQR, QSU, PTU en RST, die samen de zogenoemde volledige vierhoek $QRTU$ vormen.[3] Deze vier 'deeldriehoeken' van de volledige vierhoek $QRTU$ hebben een gemeenschappelijke Wallace-lijn $w(F)$ en daardoor ook een gemeenschappelijke Steiner-lijn $s(F)$, waarbij F het brandpunt is van de Wallace-parabool. We noemen ze daarom ook wel de Wallace- en Steiner-lijn van de volledige vierhoek $QRTU$.

En dan volgt eenvoudig uit stelling 4:

Stelling 5. *De hoogtepunten van de deeldriehoeken van een volledige vierhoek liggen op dezelfde rechte lijn, nl. op de Steiner-lijn van de volledige vierhoek.*

In figuur 10 zijn de hoogtepunten van de deeldriehoeken aangegeven met H_a, H_b, H_c, H_d. Hierbij is bijvoorbeeld H_d het hoogtepunt van driehoek PQR die gevormd wordt door de lijnen a, b, c.





FIGUUR 10 **FIGUUR 11**

En wat ook mooi is (zie weer figuur 10) – direct volgend uit het bewijs van stelling 1:

Stelling 6. *De omcirkels van de deeldriehoeken van een volledige vierhoek gaan door hetzelfde punt, te weten het brandpunt van de Wallace-parabool bij die volledige vierhoek.*[4]

6. De Euler-lijn als Steiner-lijn

Doorloopt een punt *F* de omcirkel van driehoek *ABC*, dan draait de Steiner-lijn, die volgens stelling 4 door het hoogtepunt *H* gaat, dus *om* dat punt *H*.
Er is dus een positie van *F* op die omcirkel waarvoor *s*(*F*) samenvalt met de Euler-lijn (door het hoogtepunt *H* én door het omcentrum *O*) van de driehoek.
Vatten we de Euler-lijn van die driehoek nu op als richtlijn van een Wallace-parabool, dan is een aardige (mooie) toepassing van het bovenstaande: construeer het bij die parabool behorende brandpunt *F*.
Uiteraard ligt *F* op de omcirkel van *ABC*. Het spiegelbeeld F_b' van *F* in (bijvoorbeeld) de zijde *CA* ligt dan op het spiegelbeeld van de omcirkel in die zijde (volgens welke stelling?). Maar F_b' ligt ook op de Euler-lijn (volgens welke stelling?). Zodat we het punt *F* kunnen construeren (zie figuur 11).

En daarmee is het - in ieder geval voor dit moment - mooi genoeg geweest.

Noten

[1] We schrijven in hetgeen volgt XYZ voor ∠XYZ als er geen verwarring kan ontstaan met driehoek XYZ.
[2] De negenpuntscirkel van een driehoek is de cirkel die gaat door de middens van de zijden van de driehoek, door de voetpunten van de hoogtelijnen en door de middens van de lijnstukken die de hoekpunten verbinden met het hoogtepunt van de driehoek (zie bijvoorbeeld [6], [7] en [9]).
De Euler-lijn (naar Leonard Euler, 1707-1783, Zwitserland) van een driehoek is de lijn door het middelpunt O van de omcirkel en het hoogtepunt H. Het middelpunt van de negenpuntscirkel ligt op de Euler-lijn en is het midden van het lijnstuk HO.
[3] Onder een volledige vierhoek verstaan we een figuur gevormd door vier punten (waarvan er geen drie op dezelfde lijn liggen) en de zes verbindingslijnen van die punten.
[4] Het brandpunt van de Wallace-parabool van een volledige vierhoek wordt ook wel het Miquel-punt van de volledige vierhoek genoemd; naar Auguste Miquel (1816-??, Frankrijk), die daarover publiceerde in het 'Journal de Mathématiques Pures et Appliquées' (Journal de Liouville, Tome III, Octobre 1838, Paris).

Literatuur

[5] Peter Baptist: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie. Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag (1992).
[6] Dick Bos e.a.: Moderne wiskunde vwo bovenbouw, wiskunde B2, deel 1. Groningen: Wolters-Noordhoff (1999); pp. 198-201.
[7] Dick Klingens: Van achtpunts-, via zespunts, naar negenpuntscirkel. In: Euclides 77 (4), januari 2002; pp. 178-180.
[8] Dick Klingens: Twee kegelsneden en een driehoek. Ongepubliceerd (juni 2005); te downloaden via www.pandd.nl/downloads/autopolair.pdf.
[9] P. Molenbroek: Leerboek der Vlakke Meetkunde. Groningen: P. Noordhoff N.V. (1924).
[10] I.M. Yaglom: Geometric Transformations, Vol. I, II. New York: Random House (1962, vertaling uit het Russisch).

Over de auteur

Dick Klingens is als leraar wiskunde verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is tevens eindredacteur van Euclides.
E-mailadres: dklingens@pandd.nl
URL: www.pandd.nl

EUCLIDES TERUG IN DE MEETKUNDELES

Redeneren en bewijzen aan de hand van de geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde

[Iris van Gulik-Gulikers]

Woord vooraf

De ontwikkeling van de niet-Euclidische meetkunde biedt een mooie gelegenheid om leerlingen hun bestaande meetkundekennis uit te laten breiden, en dieper in te gaan op redeneren en bewijzen binnen een axiomatisch systeem.

Inleiding

De geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde is een onderwerp dat tot nu toe nauwelijks in het voortgezet onderwijs wordt onderwezen. Toch is het een geschikt onderwerp om meer te leren over axioma's en postulaten, redeneren en bewijzen en de ontwikkeling van wiskundig denken. Naast het feit dat het ontdekken van de geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde in de lijn van de historische ontwikkeling redeneren en bewijzen binnen de meetkunde begrijpelijker maakt, vormt het ontstaansproces van de meetkunde een aangename uitdaging voor leerlingen.
In *Euclides* 78(8) (2003) heb ik een artikel geschreven waarin de algemene geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde aan bod komt. Ook geef ik daarin een aantal voorbeelden van de manier waarop ik hiervan onderwijs heb gemaakt dat gebruikt kan worden als keuzeonderwerp voor 5 en 6 vwo-ers in het subdomein 'bewijzen in de vlakke meetkunde'. In dit artikel ligt de nadruk op de rol van het parallellenpostulaat voor de ontwikkeling van de meetkunde en wil ik een indruk geven van de wijze waarop huidige vwo-leerlingen die niet ver zijn ingevoerd in het meetkundig denken, hierop reageren.

Opbouw lesmateriaal

In de huidige schoolboeken voor het vwo wordt nauwelijks aandacht besteed aan Euclides' axioma's en postulaten. De vlakke meetkunde wordt opgebouwd door een aantal Euclidische stellingen als uitgangspunt te nemen. Vanuit een lokaal deductief systeem leren leerlingen redeneren en bewijzen. Er wordt weinig aandacht besteed aan de keuze voor deze uitgangspunten en de nieuwe mogelijkheden die je kunt krijgen als je andere uitgangspunten kiest. De geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde laat deze mogelijkheden wél zien en maakt het mogelijk meer te leren over redeneren en bewijzen.
Het lesmateriaal dat ik heb ontwikkeld start met een hoofdstuk over de *Elementen* van Euclides. Leerlingen maken eerst kennis met de definities, axioma's en postulaten die Euclides heeft opgesteld. *Axioma's* zijn geen specifieke meetkundige eigenschappen, maar 'vanzelfsprekende waarheden' die je niet kunt veranderen, bijvoorbeeld: 'Als je bij gelijke dingen gelijke voegt, dan zijn de totalen gelijk.' *Postulaten* zijn 'werkhypothesen', bijvoorbeeld: 'Van een punt naar een ander punt kun je een rechte lijn trekken.' Deze postulaten vormen de 'spelregels' van het redeneren. Als je de postulaten anders kiest, krijg je een ander soort meetkunde.

Vervolgens moeten leerlingen van verschillende stellingen bewijzen leveren. Soms moet een stelling in zijn geheel worden bewezen, dan weer moet een bewijs slechts worden afgemaakt of moeten enkele ‘gaten’ in een bewijs worden ingevuld. Grote nadruk ligt op het vijfde postulaat, het parallellenpostulaat, dat een belangrijke rol speelt in de ontwikkeling van de meetkunde en het ontstaan van de niet-Euclidische meetkunde. Leerlingen herontdekken enkele ‘bewijzen’ van het parallellenpostulaat en komen tot de ontdekking dat het onmogelijk is om het parallellenpostulaat te bewijzen uit de eerste vier postulaten. Vervolgens maken ze kennis met de grondleggers van de niet-Euclidische meetkunde die de ontkenning van het parallellenpostulaat aannemen. Verder doen ze onderzoek naar twee varianten binnen de niet-Euclidische meetkunde: de elliptische meetkunde en de hyperbolische meetkunde, en bestuderen ze modellen hiervan.

Belang van het parallellenpostulaat

In het lesmateriaal worden de leerlingen geconfronteerd met het belang van het parallellenpostulaat voor resultaten binnen de vlakke meetkunde. Al in de tijd van Euclides is men in de ban van het vijfde postulaat door het gecompliceerde karakter ervan in contrast met de eenvoud van de andere axioma’s en postulaten. Daardoor ontstaat het vermoeden dat het vijfde postulaat overbodig is en een uit de andere axioma’s en postulaten af te leiden stelling is of te vervangen is door een ander, eenvoudiger postulaat dat tot dezelfde meetkunde leidt. Dit vermoeden houdt tot in de negentiende eeuw tal van wiskundigen bezig. Dan pas wordt duidelijk dat dit niet mogelijk is.
Euclides formuleert het parallellenpostulaat als volgt (zie figuur 1):

Als twee rechte lijnen m en l gesneden worden door een derde rechte lijn t, en de binnenhoeken a en b aan één kant van t zijn samen minder dan 180°, dan snijden m en l elkaar aan diezelfde kant van t.

In andere bewoordingen kan dit als volgt worden geformuleerd:

Door een gegeven punt buiten een rechte lijn gaat precies één rechte die evenwijdig is aan de lijn.

Leerlingen maken vervolgens kennis met de verschillende gevolgtrekkingen die kunnen worden getrokken met behulp van het parallellenpostulaat. Er worden een aantal stellingen gegeven die kunnen worden bewezen zonder aanname van het parallellenpostulaat, maar daarna wordt overgegaan op bewijzen van stellingen waarbij het vijfde postulaat noodzakelijk is. Een belangrijke stelling daarvan kennen de leerlingen deels uit hun eigen wiskundemethode:

In een driehoek is de buitenhoek [de hoek tussen een zijde en het verlengde van een andere zijde] gelijk aan de som van de niet- aanliggende binnenhoeken en de hoeken van een driehoek zijn samen gelijk aan 180°.

De bijbehorende opdrachten voor de leerlingen luiden als volgt:

Opdracht
(Zie figuur 2.) Bewijs het eerste gedeelte van deze propositie: In een driehoek is de buitenhoek gelijk is aan de som van de niet-aanliggende binnenhoeken. Dus bewijs: $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$.
Aanwijzing. Maak gebruik van een hulplijn door *C* evenwijdig aan *AB*. Je mag alleen de stellingen gebruiken die je tot nu toe bent tegengekomen.

Opdracht
Bewijs het tweede gedeelte van deze propositie: In elke driehoek zijn de hoeken samen 180°. Dus bewijs: $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$.

De leerling heeft nu laten zien hoe je de stelling van de hoekensom kunt bewijzen als je uitgaat van het parallellenpostulaat. Maar ook het omgekeerde laten zien is mogelijk: als de som van de hoeken in een driehoek gelijk is aan 180°, dan is het vijfde postulaat geldig. Als leerlingen dit hebben bewezen, hebben ze aangetoond dat de stelling over de hoekensom equivalent is aan het parallellenpostulaat.
Het bewijs hiervan is een stuk lastiger en maakt gebruik van de volgende hulpstelling (zie figuur 3; met n = 1 en n = 2):

Door een niet op een gegeven rechte lijn r gelegen punt A gaat steeds een rechte lijn, die een willekeurig kleine hoek $\angle AB_nB$ *met de eerste lijn maakt.*

Het bewijs van deze hulpstelling is moeilijk voor leerlingen. Daarom geef ik in het lesmateriaal een voorbeeld van een gedeelte van het bewijs. Leerlingen maken op deze manier kennis met het belang van het parallellenpostulaat voor een ogenschijnlijk eenvoudige stelling.

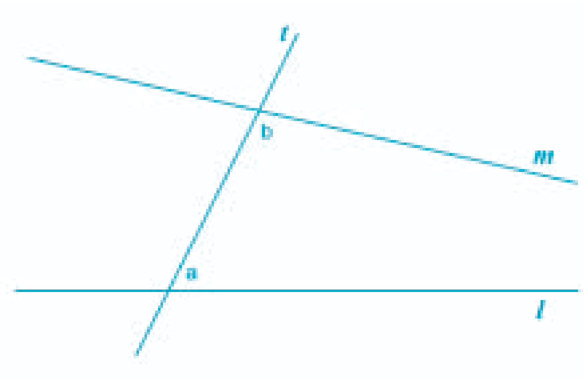
’Bewijs’ van het parallellenpostulaat

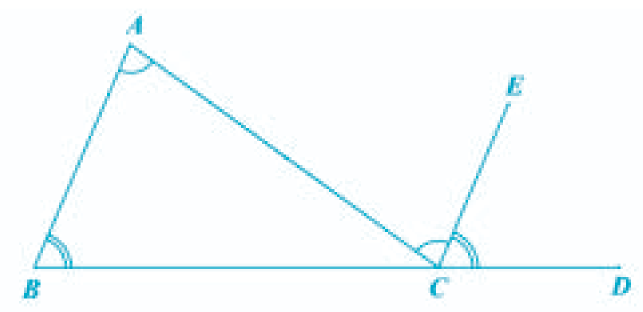
Vervolgens komen in het lesmateriaal pogingen van wiskundigen om het parallellenpostulaat te bewijzen aan de orde. Leerlingen gaan zelf ‘bewijzen’ van het parallellenpostulaat herontdekken, waaronder een poging van de 17e-eeuwse Engelse wiskundige John Wallis. Wallis probeert echter niet om het vijfde postulaat rechtstreeks te bewijzen uit de eerste vier postulaten van Euclides, maar hij neemt een nieuw postulaat aan dat volgens hem veel waarschijnlijker is dan het parallellenpostulaat. Uit de eerste vier postulaten en dit nieuwe postulaat probeert hij het parallellenpostulaat af te leiden.
Wallis’ postulaat luidt als volgt (zie figuur 4):

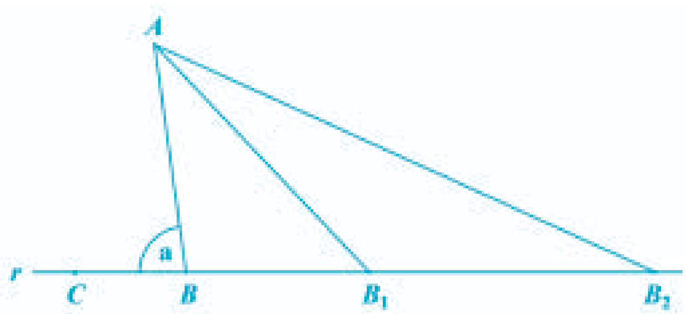
Gegeven een willekeurige driehoek ABC en een lijnstuk DE. Nu bestaat er een driehoek DEF die gelijkvormig is met driehoek ABC.

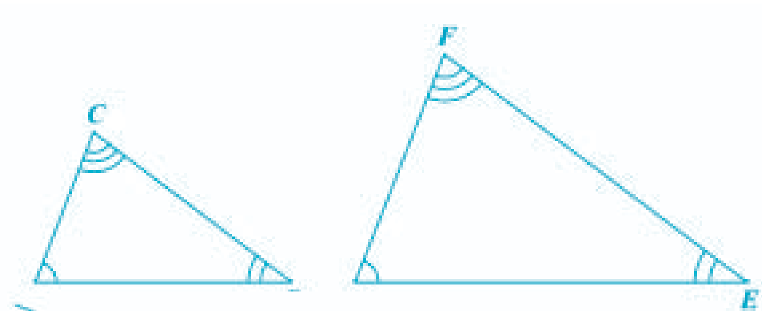
De afleiding van het parallellenpostulaat en de bijbehorende opgave voor leerlingen luiden nu als volgt:

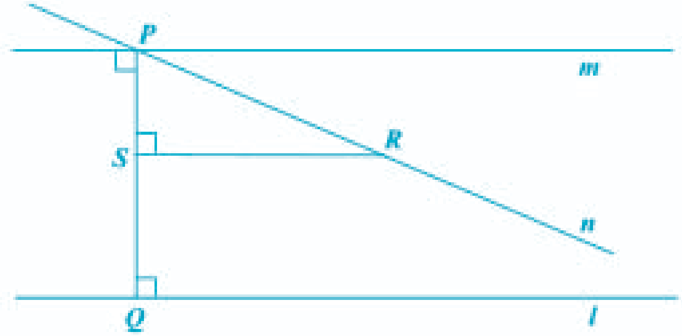
FIGUUR 2











FIGUUR 3

Gegeven: Een lijn l en een punt P niet op die lijn.
Te bewijzen: m is de enige lijn door P evenwijdig aan l.
Bewijs: (Zie figuur 5.) Teken lijn m door P evenwijdig aan l, door een loodlijn PQ op l neer te laten en m loodrecht op PQ te richten.
Teken een andere lijn n door P.
We moeten nu aantonen dat n lijn l snijdt.
We bekijken nu een lijnstuk van n vanuit P dat tussen een lijnstuk van m en PQ in ligt.
Voor elk punt R op dit lijnstuk laten we de loodlijn RS op PQ neer.
Nu passen we het postulaat van Wallis toe op ΔPSR en lijnstuk PQ.
Hieruit volgt dat er een punt T is zodat $\Delta ... \approx \Delta PQT$ (zie figuur 6).
Stel T ligt aan dezelfde kant van PQ als R.
Vanwege de gelijkvormigheid moet gelden $\angle TPQ = \angle ...$.
Aangezien beide hoeken lijnstuk PQ als been hebben en T aan dezelfde kant van PQ ligt als R, moet T wel op n liggen.
Ook moet gelden dat $\angle PQT = \angle ...$, dus $\angle PQT$ is een rechte hoek en dus ligt T ook op l.
Dus n en l snijden elkaar in T.
En daarom is m de enige lijn door P evenwijdig aan l.
Opdracht
Lees bovenstaande afleiding van het parallellenpostulaat grondig door. Vul de ontbrekende stappen aan.

Het bewijs van Wallis om uit de eerste vier postulaten van Euclides en dit nieuwe postulaat het parallellenpostulaat af te leiden is correct, maar toch is hiermee het parallellenpostulaat niet bewezen. Er is namelijk geen reden om aan te nemen dat Wallis' postulaat geloofwaardiger is dan Euclides' vijfde postulaat. Het blijkt daaraan dan ook gelijkwaardig te zijn.
Het is een opdracht voor de leerlingen om te laten zien dat Wallis' postulaat is af te leiden uit het parallellenpostulaat. Het bewijs dat Wallis' postulaat uit het parallellenpostulaat is af te leiden begint als volgt:

Gegeven: ΔABC .
Te bewijzen: Er bestaat een driehoek die gelijkvormig is met driehoek ABC (dwz. drie gelijke hoeken heeft met driehoek ABC), maar niet congruent.
Bewijs: (Zie figuur 7.) Kies een punt H tussen A en C. Kies een punt G tussen A en B zodat $\angle AGH = \angle ABC$.
Opdracht
Maak het bewijs af door te laten zien dat ΔABC en ΔAGH drie gelijke hoeken hebben. Je mag alleen gebruik maken van de stellingen die je tot nu toe bent tegengekomen en die je kunt bewijzen met behulp van het parallellenpostulaat.

Hieronder beschrijf ik hoe deze opdracht is uitgewerkt in een 6-vwo-klas met 12 leerlingen.

Observatie in de klas

Leerling Marieke heeft bovenstaande opdracht als huiswerk opgekregen. In de klas moet zij haar

bevindingen aan haar klasgenoten laten zien. Ze komt voor het bord en licht haar klasgenoten duidelijk toe dat ze gaat bewijzen dat Wallis' postulaat is af te leiden uit het parallellenpostulaat.
Haar docent schrijft dit nog even op de rechterkant van het bord op en schrijft ook op dat ze de omkering van deze stelling al eerder hebben bewezen.
Marieke tekent eerst de bij het probleem behorende figuur op het bord. Ze geeft aan dat ze gaat bewijzen dat $\triangle ABC$ en $\triangle AGH$ gelijkvormig zijn, maar niet congruent.
Marieke: 'En je mag alles aannemen wat je tot nu toe hebt bewezen.'
Daarna schrijft ze de verschillende stappen uit het bewijs op; zie figuur 8.
De docent vraagt: 'Waarom zijn $\triangle ABC$ en $\triangle AGH$ nu gelijkvormig en niet congruent?'
Marieke weet het niet.
Een andere leerling geeft als antwoord: 'Omdat je H tussen A en C kiest.'
Docent: 'En waarom heb je nu het postulaat van Wallis afgeleid uit het parallellenpostulaat?'
Niemand weet het.
Docent: 'We hebben Wallis' postulaat bewezen door gebruik te maken van het feit dat de som van de hoeken in een driehoek 180° is.'
Een leerling: 'Oh ja, en we hebben al eerder bewezen dat het parallellenpostulaat gelijkwaardig is aan de stelling die zegt dat de hoekensom van een driehoek 180° is.'
Docent: 'Dus als we met behulp van de stelling over de hoekensom Wallis' postulaat hebben bewezen, dan hebben we dat dus eigenlijk gedaan met behulp van het parallellenpostulaat.'
De docent eindigt met de opmerking: 'Alles wat Wallis heeft gedaan is waar, maar hij is er dus niets mee opgeschoten.'
Marieke heeft de uitwerking van de opdracht, met de toevoegende opmerking van de docent ook in haar schrift geschreven; zie figuur 9.

Evaluatie van de observatie

In de klas wordt een veilige omgeving gecreëerd waarin leerlingen hun eigen oplossingen met plezier durven presenteren en hierover met elkaar discussiëren. De leerlingen raken hierdoor gemotiveerd en leren beter redeneren en bewijzen.
Door de klassikale bespreking van de opdracht wordt het denken van de leerlingen zichtbaar. De docent heeft de mogelijkheid om de nadruk te leggen op bepaalde belangrijke zaken, bijvoorbeeld dat leerlingen iedere stap in een bewijs moeten verantwoorden. Onder begeleiding van de docent wordt ook tijd besteed aan reflecteren en terugblikken, iets waar leerlingen vaak zelf te weinig tijd voor nemen.
Dat de centrale aanpak van de docent goed werkt blijkt uit de positieve reacties van de leerlingen. Een leerling zegt hierover:
'Ik heb met heel veel motivatie en veel plezier de hele periode door gewerkt aan het boekje. Het was niet alleen leuk, maar ook erg handig. Leuk, omdat er veel klassikaal gedaan werd. Het geeft een lekker gevoel als sommen of opgaven uitvoerig klassikaal besproken worden. Als je de opdrachten niet kunt oplossen, wil je het graag uitgelegd krijgen en als je het wel begrijpt, wil je graag zien hoe andere mensen het opgelost hebben. Je ziet dat als je met meerdere mensen tegelijk denkt, dat je dan op betere ideeën kunt komen.'

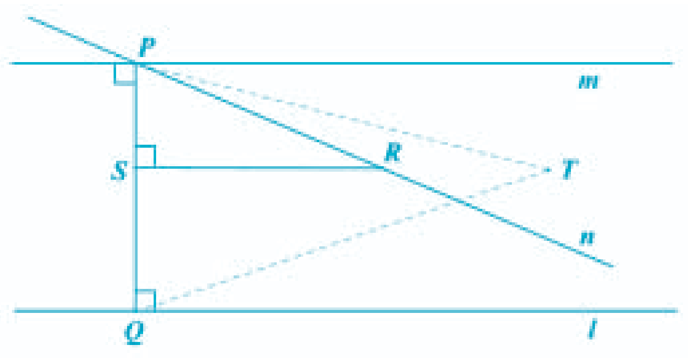
Algemene ervaring leerlingen

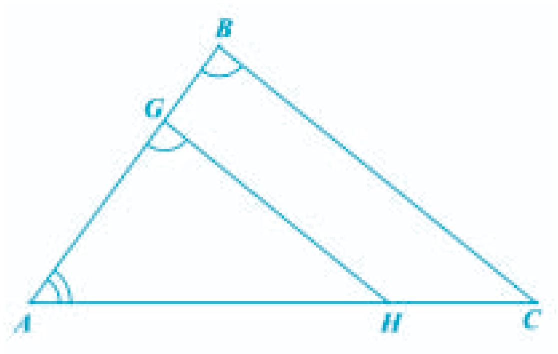
Om na te gaan welke invloed het door mij ontworpen lesmateriaal heeft gehad, heb ik enquêtes afgenomen onder leerlingen. Het blijkt dat het overgrote deel van de leerlingen de geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde een positieve toevoeging voor de meetkundelessen vindt. De aantrekkingskracht van het onderwerp ligt voor leerlingen vooral in het behandeld zien van een onderwerp in de lijn van de historische ontwikkeling. De ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit de historische context wekt interesse op. Bovendien vinden leerlingen dat de meetkunde beter te begrijpen is als je het ontstaansproces kent. De meeste leerlingen vinden dat je meetkunde beter kunt begrijpen 'omdat je weet waar het vandaan komt en hoe het ontstaan is' en 'hoe de basis is gelegd en hoe het is opgebouwd'. Bovendien leren leerlingen hoe de grondleggers van de niet-Euclidische meetkunde een probleem aanpakken en 'het begin van een probleem is toch wat makkelijker te begrijpen'. De achtergrondinformatie over de geschiedenis geeft leerlingen daarnaast 'meer inzicht in de ontwikkeling van de meetkunde en in de manier waarop een wiskundige tot een formulering is gekomen', waardoor de meetkunde 'meer structuur krijgt'.
Marieke schrijft over haar ervaring met het lesmateriaal het volgende:
'Het project dat we met Wiskunde B12 gedaan hebben, over niet-Euclidische meetkunde, vond ik heel leuk. Het is leuk om te bewijzen. En ook om meer over de geschiedenis van de wiskunde te weten te komen. Doordat je meer van de achtergrond weet gaat het allemaal meer leven. Je krijgt het gevoel alsof je in het leven van zo'n wiskundige stapt, doordat je zijn bewijzen na gaat doen en dus opnieuw gaat "bewijzen". Het was erg leuk om te doen, maar ik ben niet zo geniaal als al die oude wiskundigen, dus ik vond het vrij moeilijk. Veel van die bewijzen kreeg ik zelf niet voor elkaar, met hulp van anderen snap ik het echter wel. De stof was dus erg pittig.
Wat ik lastig vond is dat je je eerst heel erg richt op de Euclidische meetkunde, en net als je het begint te begrijpen, moet je opeens omswitchen naar de niet-Euclidische meetkunde, en dus alles wat je net begrijpt moet je dan opeens opzij zetten. Dat was wel ingewikkeld.'

Afsluiting

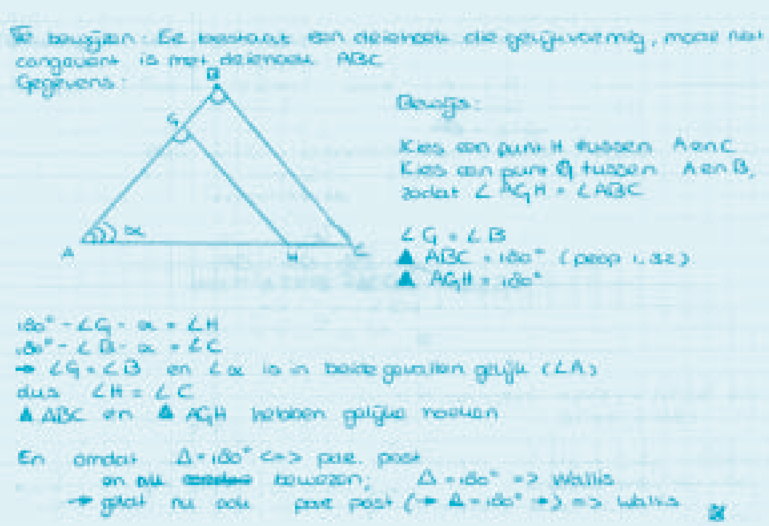
Onderzoek naar en vergelijking van de Euclidische en de niet-Euclidische meetkunde laat zien hoe je een meetkundig systeem vanuit definities, axioma's en postulaten kunt opbouwen. Leerlingen krijgen hierdoor een beter begrip van redeneren en bewijzen binnen een axiomatisch systeem. Ook krijgen ze bewondering voor

FIGUUR 7





$\angle BAC = \angle GAH$
prop. I.32
$\Delta ABC = 180°$
$\Delta AGH = 180°$
$180° - \angle G - \angle A = \angle H$
$180° - \angle B - \angle A = \angle C$
$\angle G = \angle B, \angle A = \angle A$
$\Rightarrow \angle H = \angle C$



FIGUUR 8

de manier waarop bewijzen in elkaar zitten en respect voor diegenen die ze bedacht hebben. De geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde vormt zo een uitdaging en verrijking van de leerstof.

Literatuur

- *J.E. Beth: Inleiding in de niet-Euclidische meetkunde op historischen grondslag. Groningen (1929).*
- *R. Bonola: Non-Euclidean geometry, a critical and historical study of its developments. New York (1955).*
- *E.J. Dijksterhuis: De Elementen van Euclides. Groningen (1929).*
- *M.J. Greenberg: Euclidean and non-Euclidean geometries, development and history. New York (1993).*
- *I. Gulikers: Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde intrigeert leerlingen. In: Euclides 78(8) (2003), pp. 346-351.*
- *I. van Gulik-Gulikers: Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde. Utrecht (2005); Zebraboekje nr. 21.*
(Red.) De eerste vijf hoofdstukken van dit boekje nemen ongeveer 20 slu in beslag. Achterin het boekje zijn een zestal onderzoeksopdrachten opgenomen. Een docentenhandleiding (met o.m. uitwerkingen van de opgaven) kan per e-mail worden aangevraagd bij de auteur.
Zie ook de advertentie elders in dit blad.
- *I. van Gulik-Gulikers: Meetkunde opnieuw uitgevonden. Een studie naar de waarde en de toepassing van de geschiedenis van de meetkunde in het wiskundeonderwijs (proefschrift). Groningen (2005).*
- *T.L. Heath: The thirteen books of Euclid's Elements. New York (1956).*

Over de auteur

Iris van Gulik-Gulikers is als wiskundedocente werkzaam aan de Van der Capellen Scholengemeenschap te Zwolle. Daarnaast is zij aan de Rijksuniversiteit Groningen gepromoveerd op een studie naar de waarde en de toepassing van de geschiedenis van de meetkunde in het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: gulikgulikers@home.nl
URL: http://members.home.nl/gulikgulikers/WiskundePagina.htm

WISKUNDE, LOGICA, BEWIJZEN EN ARGUMENTEREN

[Harrie de Swart]

Introductie

Ik heb vele jaren wiskundeonderwijs mogen geven aan beginnende hbo-studenten in het deeltijd-(avond)onderwijs met een deficiëntie voor wiskunde. De wiskundestof was elementair, maar elegant: rekenen met natuurlijke, gehele, rationale en reële getallen, rekenkundige en meetkundige rijen met als toepassingen lineaire aflossingen, contante waarde en jaarlijkse annuïteiten, eerstegraads functies met als toepassingen vraag- en aanbodfuncties, tweedegraads functies met als toepassingen ontvangst-, kosten- en winstfuncties. De studenten waren in het algemeen allergisch voor wiskunde, maar toch heb ik met het grootst mogelijke genoegen wiskundeonderwijs gegeven aan deze studenten. Waarom? Omdat de beloning groot was. Veel studenten hadden een aha-erlebnis: ze dachten dat wiskunde ontoegankelijk voor hen was en ontdekten nu dat die wiskunde hen wel degelijk aansprak. Ze hadden een overwinning geboekt: ze waren slimmer dan ze zelf dachten, ze konden ook wiskunde doen al dachten ze aanvankelijk van niet. Toch heb ik nauwkeurige bewijzen niet vermeden. Sterker nog, ik durf op grond van vele jaren onderwijservaring te beweren dat juist dankzij die nauwkeurige aanpak met precieze definities van de begrippen en precieze bewijzen van de stellingen de studenten het *inzicht* verwierven, waardoor de wiskunde niet langer hokus-pokus voor hen was, maar een inzichtelijk geheel, dat toepasbaar was op een veelheid van economische situaties, zoals lineaire afschrijvingen en aflossingen, contante waarde en jaarlijkse annuïteiten, vraag en aanbod, evenwichten, ontvangst, kosten en winst, etc. In de eerste les werd de opbouw van de getallen inzichtelijk gemaakt: baby's die tellen (natuurlijke getallen), een negatief in plaats van positief saldo (gehele getallen), 2 appels met 3 personen gelijkelijk delen (breuken) en tenslotte de lengte ($\sqrt{2}$) bepalen van de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van lengte 1 (reële getallen). Dat de rekenmachine een rationaal getal geeft als je $\sqrt{2}$ vraagt in plaats van een reëel getal en dat deze benadering wel eens fataal kan zijn bij het sturen van een raket over grote afstand naar bijvoorbeeld de maan, was een eye opener voor de studenten. Ze dachten dat ze de rekenmachine volledig konden vertrouwen. Ze leerden $\frac{2}{3}$ en $\frac{5}{7}$ bij elkaar optellen en ontdekten dat het resultaat toch zuiverder en eenvoudiger is dan dat verkregen via de rekenmachine.

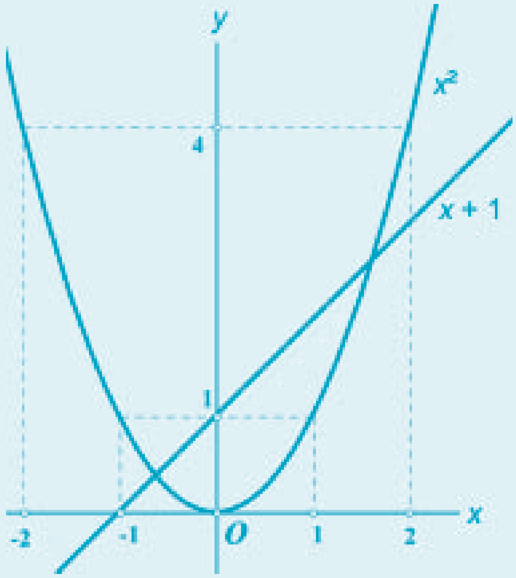
$$\sqrt{2} = 1{,}414213562$$

ONWAAR

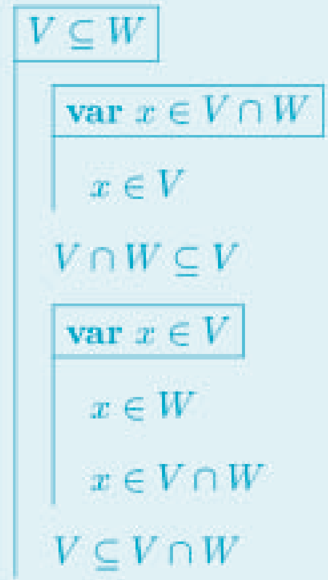
Ik heb de studenten steeds alle bewijzen nauwkeurig voorgeschoteld, met de mededeling dat ze het bewijs niet hoefden te reproduceren op een tentamen, maar dat ik hoopte dat ze het bewijs wel zouden *begrijpen* en daardoor inzien dat de gedane beweringen inderdaad juist zijn. Ik heb ook steeds benadrukt dat ik geen zin had om ze als apen te behandelen en ze een aantal kunstjes te leren, maar dat het mij er om ging ze *inzicht* bij te brengen, niet meer en niet minder. En *het inzicht is te vinden in nauwkeurige definities van de gebruikte begrippen en in precieze bewijzen van de gedane beweringen.* Door de zuivere wiskunde hand in hand te doen gaan met allerlei voor ieder herkenbare (economische) toepassingen ontstaat een twee-eenheid met onderlinge wisselwerking, die studenten enerzijds inzicht geeft en anderzijds ook het praktische nut laat zien.

Logica

Hoewel een degelijke cursus Logica ondersteunend kan zijn voor het wiskundeonderwijs, is de Logica toch in eerste instantie een beschrijving achteraf hoe een



FIGUUR 1



FIGUUR 2

wiskundige redeneert en omgaat met de voegwoorden, in het bijzonder met *'als ..., dan ...'*. Zo wordt in de logica het gebruik door wiskundigen van *'als ..., dan ...'* beschreven in de waarheidstabel: een uitspraak van de vorm *als A, dan B* is alleen onwaar (0) als *A* waar (1) is en *B* onwaar (0). In alle andere gevallen is *als A, dan B* waar. Dit kan geïllustreerd worden met de bewering 'voor alle getallen *a* en *b*, als $a = b$, dan $a^2 = b^2$'. Waarom is deze bewering waar? Omdat het uitgesloten is dat $a = b$ waar (1) is en tegelijk $a^2 = b^2$ onwaar (0). Invullen van diverse getallen voor *a* en *b* illustreert dat:

	$a=b$	$a^2=b^2$	als $a=b$, dan $a^2=b^2$
$a=2, b=2$	1	1	1
$a=2, b=-2$	0	1	1
$a=2, b=3$	0	0	1

De combinatie $a = b$ waar (1) en tegelijk $a^2 = b^2$ onwaar (0) doet zich niet voor.

Hoewel mijns inziens de beste manier om precies en nauwkeurig te leren redeneren het doen van wiskunde is met de nadruk op het bewijzen van stellingen uit de axioma's of reeds eerder bewezen stellingen, kan de Logica wel ondersteunend zijn door uitdrukkelijk stil te staan bij de analyse van *als ..., dan ...* en van de kwantoren *'voor iedere'* en *'er is minstens één'*. Zo valt mij op dat studenten nog wel eens elementaire fouten willen maken: zij lezen een 'als *A* dan *B*' uitspraak bijvoorbeeld ten onrechte als *'A en (dus) B'*, terwijl in 'als *A* dan *B*' de uitspraak *A* helemaal niet beweerd wordt, hetgeen wel het geval is in de uitspraak '*A* en (dus) *B*'. Ook zie je vaak dat uit de premissen (vooronderstellingen)

Als er files zijn, dan komt Jan niet; en
Jan komt niet

ten onrechte geconcludeerd wordt dat er (wel) files op de weg (zullen) zijn. Door er op te wijzen dat deze redenering van de vorm

als A dan B
B
dus: A

is, kun je de student duidelijk maken dat de redenering niet correct is door het geven van een tegenvoorbeeld, zoals:

Als Rockefeller alle goud van Fort Knox bezit, dan is hij rijk.
Rockefeller is rijk.
Maar Rockefeller bezit niet alle goud van Fort Knox.

Het is niet moeilijk in te zien dat een redenering van de vorm (1)

als A dan B
niet B
dus: niet A

correct is, maar men wil soms ten onrechte een redenering van de vorm (2)

als A dan B
niet A
dus: niet B

als correct aanmerken, bijvoorbeeld in:

Als het sneeuwt, dan komt Jan niet.
Het sneeuwt niet.
Dus: Jan komt (wel).

Ook hier laat een tegenvoorbeeld zien dat dit redeneerpatroon niet geldig is:

Als Rockefeller alle goud van Fort Knox bezit, dan is hij rijk.
Rockefeller bezit niet alle goud van Fort Knox.
Maar Rockefeller is (wel) rijk.

Het is belangrijk in te zien dat de conclusie van een correcte redenering niet waar hoeft te zijn; zij is slechts waar als alle premissen waar zijn en dat hoeft niet het geval te zijn. Als we in het geldige redeneerpatroon (1) voor *A* de uitspraak 'Rockefeller is

rijk' nemen en voor *B* de uitspraak 'Rockefeller bezit alle goud van Fort Knox', dan hebben we een correcte redenering met een onware conclusie. Dat kan alleen maar als minstens één van de premissen onwaar is. En inderdaad, de eerste premisse is onwaar.
Eveneens belangrijk is het om in te zien dat een incorrecte redenering best een ware conclusie kan hebben. Maar de waarheid van de conclusie steunt dan niet op de waarheid van de premissen. Als we in het ongeldige redeneerpatroon (2) voor *A* de uitspraak 'ik bezit alle goud van Fort Knox' en voor *B* de uitspraak 'ik ben rijk' nemen, dan krijgen we een incorrecte redenering met een ware conclusie: ik ben niet rijk.

Kwantoren

Logica kan ook verhelderend werken bij het gebruik van de kwantoren '*voor iedere* ($\forall$)' en '*er is minstens één* ($\exists$)', bijvoorbeeld bij het onderscheid tussen continuïteit en uniforme continuïteit. De eenvoudige Nederlandse zin 'ieder mens (x) heeft een moeder (y)' kan worden weergegeven met

$$\forall x\, \exists y\, [\, y \text{ is de moeder van } x\,]$$

waarbij de waarde van y afhangt van de waarde van x. Verwisselen van de kwantoren geeft

$$\exists y\, \forall x\, [\, y \text{ is de moeder van } x\,]$$

hetgeen betekent dat er minstens één y is zodanig dat voor iedere x, y de moeder is van x. In gewoon Nederlands: er is iemand (y) die de moeder is van alle mensen (x). De waarde van y hangt nu niet meer af van de waarde van x.
De volgorde van de kwantoren is dus belangrijk en verklaart ook het verschil tussen de begrippen *continuïteit* en *uniforme continuïteit*.
Zo is de functie f gedefinieerd door $f(x) = x + 1$ uniform continu op de verzameling van de (positieve) reële getallen, terwijl de functie g gedefinieerd door $g(x) = x^2$ wel continu, maar niet uniform continu is op deze verzameling, omdat g harder stijgt naarmate x groter wordt. Zie figuur 1.
'f is continu op V' kan worden weergegeven met

$$\forall \varepsilon\, \forall x\, \exists \delta\, \forall y\, [\, |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,]$$

waarbij x en y variabelen over V zijn en $\varepsilon, \delta > 0$.
Hierbij hangt de waarde van δ af van de waarde van ε en van die van x.
'f is uniform continu op V' daarentegen wordt weergegeven door

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x\, \forall y\, [\, |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,]$$

waarbij de waarde van δ nu alleen maar afhangt van de waarde van ε en niet meer van de waarde van x.
De volgorde van de kwantoren in $\forall x \exists \delta$ en in $\exists \delta \forall x$ maakt het verschil tussen continuïteit en uniforme continuïteit.

Bewijzen

Het is niet alleen belangrijk de student de ervaring bij te brengen van het onderscheid tussen iets goed begrijpen en iets half en dus niet begrijpen (iets geloven, iets napraten), maar ook om de student te trainen in het onderscheiden van correcte en incorrecte redeneringen. Deze laatste lijken in het dagelijks leven te domineren, met alle kwalijke gevolgen van dien, ook in sociaal opzicht.

Wellicht de beste manier om vertrouwd te raken met gezond redeneren is via de Euclidische meetkunde. Uit nauwkeurig geformuleerde axioma's kan men door (logisch) redeneren allerlei interessante stellingen afleiden. Zo heb ik het vroeger op de middelbare school ook geleerd. De axioma's werden gewoon informeel in de Nederlandse taal weergegeven, zoals 'door twee punten gaat precies één rechte lijn' en 'door een gegeven punt buiten een gegeven lijn kan men precies één lijn trekken evenwijdig aan de gegeven lijn'. En via informeel redeneren werden dan allerlei stellingen bewezen, zoals 'de drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt', daarbij uitsluitend gebruik makend van de meetkundige axioma's en gezond redeneren. Later op de universiteit heb ik geleerd dat die meetkundige axioma's en stellingen ook in een formele taal geformuleerd kunnen worden en dat ook het informele logisch redeneren kan worden weergegeven door middel van vaste logische regels, geformuleerd in diezelfde formele taal.

Een andere manier om studenten vertrouwd te maken met correct redeneren is door ze allerlei eenvoudige oefeningen te laten maken met betrekking tot verzamelingen. Hier is nauwelijks kennis voor nodig. Als de student weet wat de doorsnede $V \cap W$, de vereniging $V \cup W$ en het relatieve complement $V - W$ van twee verzamelingen V en W is, en ook de betekenis weet van 'V is een deelverzameling van W' ($V \subseteq W$), dan is er een overvloed aan opgaven te maken waardoor hij of zij zich vertrouwd kan maken met het geven van bewijzen.
Het is overigens verbazingwekkend hoeveel moeite veel studenten hebben om een goed bewijs te geven of om een bewijs goed op te schrijven.
Laten we een voorbeeld nemen.

Stelling. Voor alle verzamelingen V en W, als $V \subseteq W$, dan $V \cap W = V$.
Bewijs:
Stel $V \subseteq W$.
  Aan te tonen dat (i) $V \cap W \subseteq V$.
    Stel dus $x \in V \cap W$, d.w.z. $x \in V$ en $x \in W$.
    Dus $x \in V$.
  Aan te tonen dat (ii) $V \subseteq V \cap W$.
    Stel dus $x \in V$.
    Ondersteld was dat $V \subseteq W$. Dus $x \in W$.
    Dus $x \in V \cap W$.

N.G. de Bruijn heeft een prachtige notatie bedacht om dergelijke bewijzen netjes gestructureerd op te schrijven. Men kan deze notatie vinden in het boek

van Rob Nederpelt en Fairouz Kamareddine [4]. Ons bewijs-voorbeeld hierboven ziet er in deze notatie uit als in figuur 2 op pag. 207.

Argumenteren

Probeert een wiskundige zijn wiskundige beweringen te baseren op precies geformuleerde axioma's, bijvoorbeeld die van de Euclidische meetkunde, door zorgvuldig (logisch) redeneren, in het dagelijks leven is het vaak eerder zo dat men graag bepaalde beweringen wil doen en dan vervolgens naar (meer of minder goede) argumenten zoekt om die beweringen enige onderbouwing te geven. Daarbij worden allerlei foutieve denkwijzen gehanteerd en oneerlijke discussiemethoden gebruikt, zoals prachtig uiteengezet in het boekje van A.F.G. van Hoesel, *Zindelijk denken*, dat helaas al vele jaren niet meer in de handel is. In dit boekje worden een tiental foutieve denkwijzen onderscheiden en met voorbeelden geïllustreerd. Als eerste noemt Van Hoesel de *cliché's en dooddoeners*. Helaas, deze worden maar al te vaak gebruikt om elke discussie in de kiem te smoren. Uitdrukkingen als 'Jij wordt oud' als je je verzet tegen de bureaucratie in het onderwijs, of 'Daar heb je hem weer' als je argumenteert tegen de zoveelste zogenaamde onderwijsvernieuwing, beëindigen in feite de discussie. Dat sommige oudere mensen geen verstandige dingen meer zeggen, mag niet gegeneraliseerd worden tot: alle oudere mensen zeggen geen verstandige dingen meer. Dit is een elementaire logische fout: uit 'er zijn x zodanig dat' ($\exists x$) mag je niet concluderen dat 'voor alle x' ($\forall x$). Ook een uitdrukking als 'de waarheid zal wel in het midden liggen' wordt te pas en te onpas gebruikt om discussies af te kappen. Maar als de één beweert dat 2 + 2 = 4 en de ander beweert dat 2 + 2 = 6, dan kun je niet aankomen met 'de waarheid zal wel in het midden liggen', dus 2 + 2 = 5.

Een andere veel gemaakte denkfout is: *daarna, dus daardoor*. Zo zal menigeen die hoofdpijn heeft na het innemen van aspirine na enige tijd dankbaar verzuchten dat die tabletjes toch weer goed geholpen hebben. Maar in veel gevallen zou de hoofdpijn ook wel zonder die medicijnen zijn over gegaan.

Wellicht nog erger zijn de oneerlijke discussiemethoden, waarvan Van Hoesel ook een tiental categorieën onderscheidt. De eerst door hem genoemde is die van *iemand in een extreme hoek dringen*. Zo heb ik in een vergadering eens meegemaakt dat iemand bij voortduring zat te liegen en ik uiteindelijk de verleiding niet kon weerstaan om dat ook expliciet te zeggen. Het gevolg was dat de discussie onmiddellijk verschoof naar de vraag of je zoiets wel kon beweren en de vergadering meende dat ik mijn excuses moest aanbieden. Waar de discussie aanvankelijk over ging is niet meer aan de orde gekomen. Een ander voorbeeld is *iemand iets in de schoenen schuiven* dat hij niet beweerd heeft. Zo mocht ik meemaken dat na een voordracht van een politicus een transportondernemer pleitte voor meer wegen, waarop de politicus reageerde met de opmerking dat je toch niet heel Nederland kunt asfalteren. Een andere door Van Hoesel genoemde oneerlijke discussiemethode is die van *suggestief woordgebruik*, zoals het te pas en te onpas gebruik van termen als ultrarechts, ultralinks, etc.

Overigens wordt nog al eens gesproken over argumentatietheorie, maar van een uitgekristalliseerde theorie van het argumenteren kun je niet of nauwelijks spreken. Er is veeleer sprake van allerlei wetenswaardigheden betreffende het argumenteren. In genoemd boekje zijn een aantal interessante te vinden. Aanzetten tot theorievorming vindt men bijvoorbeeld in Frans H. van Eemeren en Rob Grootendorst, *A Systematic Theory of Argumentation*. Zie ook Alec Fisher, *Critical Thinking; An Introduction*.

Conclusie

Wiskunde is het middel bij uitstek om mensen te leren begrippen nauwkeurig vast te leggen, correct te redeneren en analytisch te denken. Het is natuurlijk niet het enige middel daartoe; in feite zal elke goede opleiding deze bekwaamheden bijbrengen. Maar wiskunde is wel het middel bij uitstek, vanwege de hoge graad van abstractie, waardoor die wiskunde tegelijk breed toepasbaar is. Daarnaast ervaart de student bij (goede) wiskunde een zekere schoonheid en elegantie, die samenvalt met de waarheid ervan. Het is zo belangrijk het verschil te ervaren tussen iets echt zelf inzien en iets half begrijpen of napraten. Precies zijn is een groot goed, niet alleen in de wetenschap, maar ook in het dagelijks leven, bijvoorbeeld in het verkeer. Waar kan de student beter leren dat kleine verschillen, zoals in $\forall x \exists \delta$ en in $\exists \delta \forall x$, grote gevolgen kunnen hebben?

Referenties

[1] Frans H. van Eemeren, Rob Grootendorst: A Systematic Theory of Argumentation / The Pragma-dialectical Approach. Cambridge University Press (2004).

[2] Alec Fisher: Critical Thinking / An Introduction. Cambridge University Press (2001, 2005).

[3] A.F.G. van Hoesel: Zindelijk denken; foutieve denkwijzen en oneerlijke discussiemethoden. Bloemendaal: Nelissen (1955).

[4] Rob Nederpelt, Fairouz Kamareddine: Logical Reasoning / A First Course. London: King's College Publications (2004).

[5] H.C.M. de Swart: Filosofie van de Wiskunde. Leiden: Martinus Nijhoff (1989).

[6] H.C.M. de Swart: Elementaire Wiskunde. Zutphen: Thieme (1997).

[7] H.C.M. de Swart: LOGIC, Mathematics, Language, Computer Science and Philosophy. Frankfurt: Verlag Peter Lang (1993).

[8] H.C.M. de Swart, A. van Deemen, E. van der Hout, P. Kop: Verkiezingen, een web van paradoxen. Utrecht: Epsilon Uitgaven (Zebra-boekje 8, 2000).

Over de auteur

Harrie C.M. de Swart (1944) studeerde Wis- en Natuurkunde in Nijmegen onder leiding van Johan de Iongh, met als specialisatie Grondslagen (i.h.b. Logica) en Filosofie van de Wiskunde. Hij is vanaf 1980 hoogleraar Logica aan de Universiteit van Tilburg. Zijn bijzondere aandacht gaat uit naar wiskundige modellering van sociale processen, zoals verkiezingen en coalitieformatie. Hij was vele jaren docent wiskunde aan de avond-heao in Breda, zie [6]. Hij publiceerde over Logica [7], Filosofie van de Wiskunde [5], Sociale Keuze Theorie [8] en diverse andere onderwerpen.

E-mailadres: H.C.M.deSwart@uvt.nl

URL: www.uvt.nl/faculteiten/fww/medewerkers/swart

DE OPBOUW VAN EEN WISKUNDE-PROGRAMMA VOOR DE NIET-MATHEMATISCHE RICHTINGEN VAN HET H.A.V.O. [1])

door

G. KROOSHOF

Groningen

> Wiskunde is een bijzonder wetenschappelijk en maatschappelijk verschijnsel. Alleen, wie haar zelf bedreven heeft, kan haar betekenis begrijpen.

1. Doelstellingen

In 1959 heeft de Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. aandacht besteed aan de doelstellingen van het wiskunde-onderwijs. Uit de discussies daarover zijn enkele gewichtige onderscheidingen voortgekomen. Men vindt die o.a. vermeld in het Mededelingenblad van de Werkgroep van juni 1959. Hierin wordt een verslag gegeven van een referaat van Dr. van Hiele. Deze schrijft over dit onderwerp eveneens in een artikel in Euclides, **35** (1960) p. 177. De hoofdzaken wil ik hieronder even vermelden. In de eerste plaats werd onderscheid gemaakt tussen subjectieve en objectieve doelen.

Subjectieve doelen zijn bijvoorbeeld het bevorderen van de activiteit, het esthetisch beleven, de creativiteit van de leerling, enz. Van Hiele zegt hierover: *Hoewel de subjectieve doelen uiterst belangrijk zijn, kunnen ze niet bepalend zijn voor de inhoud van het vak.* Alleen de leraar in zijn les kan het verwerkelijken van de subjectieve doelen bereiken door zijn enthousiasme, zijn speciale belangstelling, enz.

Objectieve doelen kunnen zijn: de cultuuroverdracht, het bevorderen van het kritisch denken, de toepasbaarheid voor de maatschappij of de wetenschap, het wiskundig of logisch leren ordenen, enz.

Deze objectieve doelen kunnen nog gesplitst worden in materiële en formele doelen. Een materieel doel treffen we aan bij die onderwerpen uit de wiskunde, die om zichzelfs wil geleerd worden, bijv. de stelling van Pythagoras, de *abc*-formule voor de vierkantsvergelijking, enz.

Formele doelen zijn bijvoorbeeld: het weten wat een bewijs is, op een hoger denkniveau komen, de innerlijke structuur van de wiskunde doorzien.

Alleen de formele doelen kunnen bepalend zijn voor de inhoud van een vak. Omdat echter deze doelen slechts bereikt kunnen worden via het handelen met de materie, worden allerlei materiële doelen daarmee ook bereikt. De formele doelen komen alleen tot hun recht, als men zich bij zijn onderwijs ook werkelijk op deze formele doelen richt. Dit houdt onder meer in, dat men niet, om vlugger klaar te zijn, tot materiële doelen moet overgaan. Men moet zich niet haasten. Het bereiken van materiële doelen is nl. in het algemeen veel gemakkelijker dan het bereiken van formele doelen. Daarom neemt men op scholen met een beperkt wiskunde-programma nog al eens zijn toevlucht tot het enkel stellen van materiële doelen. Er zijn echter zeker een aantal formele doelen te bereiken, wanneer men er de tijd voor neemt, het tempo dus laag houdt, en wanneer men er de moeite voor over heeft. Het kost nl. de docent beslist meer inspanning.

(...)

2. De objectieve doelen

Gaan we nu na, welke objectieve doelen we moeten stellen voor de niet-mathematische richtingen van het h.a.v.o. De meeste leerlingen daarvan zullen behoren tot de literair-culturele richting, die te vergelijken is met de tegenwoordige m.m.s. Zij zullen o.a. toegang krijgen tot de tweede leerkring van de kweekschool. Voor leerlingen, die deze beroepskeuze doen is het hierna te schetsen programma zeker van belang omdat ze de didactiek van het rekenen moeten kunnen begrijpen, o.a. door een juist *inzicht in de opbouw van de getallenwereld en de betekenis van de operaties daarin.* Ook al zouden ze echter in hun verdere beroep weinig of niet meer met wiskunde te maken krijgen, dan nog is een kennismaking met dit vak noodzakelijk, omdat wiskunde een bijzonder maatschappelijk verschijnsel is, dat slechts begrepen kan worden door hen, die er zelf mee gewerkt hebben. Het zal echter duidelijk zijn, dat dit werken niet moet betekenen het oplossen van allerlei door de traditie voorgeschreven vraagstukken. Voor hen moet het formele doel zijn: *het verwerven van inzicht in de innerlijke structuur van de wiskunde.*

(...)

Naast de zojuist vermelde formele doelen, wil ik nog twee andere noemen; het eerste daarvan luidt:

Inzicht in de meetkundige structuur van zowel vlakke als ruimtelijke figuren. Dit inzicht moet worden verkregen door het „handelen" met figuren, d.w.z. het tekenen en het vervaardigen daarvan (het maken van uitslagen is een goede aanleiding tot het construeren van nauwkeurige planimetrische figuren). Verder moeten het spiegelen, draaien en verschuiven zowel met knipsels, als met behulp van passer en lineaal en ook door het gebruiken van een spiegel het inzicht versterken. Dat na het aanleren van een eenvoudige tekenmethode ook zulke transformaties op ruimtefiguren kunnen worden toegepast is gebleken in een tweede klas van een m.m.s.

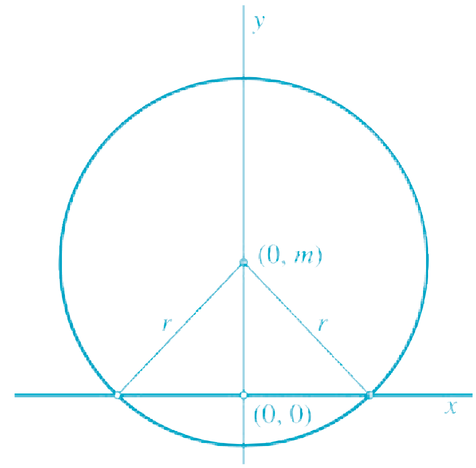
Het tweede formele doel, dat ik nog zou willen noemen, kan m.i. alleen bereikt worden als de tijd het toelaat de leerlingen op het daarvoor vereiste denkniveau te brengen. Het zou als volgt geformuleerd kunnen worden: *Inzicht in de deductieve opbouw van een stukje wiskunde*, dat beslist geen meetkunde behoeft te zijn. Iets minder veeleisend is misschien de volgende formulering: *Inzicht in het verschil tussen definitie en stelling*. Misschien kan dit bereikt worden door in de verzameling der vierhoeken een klassenindeling aan te brengen, nadat bij de hierboven genoemde oefeningen de kenmerkende overeenkomsten en verschillen tussen verschillende vierhoeken zijn gebleken.

Gedeelten van een artikel van G. Krooshof, zijnde de neerslag van een door hem gehouden voordracht voor de Wiskunde Werkgroep van de WVO op 27 maart 1965, uit Euclides 41 (1965-1966), blzn. 108-116.

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mailadres: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

BEWIJZEN MET COÖRDINATEN

[Jan van de Craats]



FIGUUR 1 De snijpunten van een lijn en een cirkel

Inleiding

Zo'n tien jaar geleden meenden sommigen dat 'redeneren en bewijzen' meer aandacht moest krijgen in de schoolwiskunde. Als gevolg hiervan werd in het vwo-profiel Natuur en Techniek de vlakke meetkunde volgens de klassieke axiomatische methodes van Euclides weer van stal gehaald. Over de resultaten van deze operatie wordt verschillend gedacht. Zo is er veel onvrede over het feit dat deze behandeling van de meetkunde irrelevant is voor alle vervolgopleidingen waar de B-profielen op voorbereiden, zelfs voor een wiskundestudie. Zou het niet veel beter zijn om de schaarse uren te vullen met onderwerpen waar het vervolgonderwijs wél wat aan heeft?
Toch blijft de vlakke meetkunde, inclusief bewijzen, een prachtig vak voor liefhebbers, zeker wanneer je het behandelt op een manier die wél aansluit bij moderne ontwikkelingen en toepassingen.

Simpel

Laat ik met een voorbeeld beginnen. Een cirkel en een lijn in het euclidische vlak hebben nul, één of twee punten gemeen. Hoe bewijs je dat? Simpel. Kies cartesische coördinaten zo, dat de gegeven lijn met de x-as samenvalt en dat het middelpunt van de gegeven cirkel op de positieve y-as ligt (zie figuur 1). Dan wordt voor een zekere $r > 0$ en een zekere $m \geq 0$ de vergelijking van de cirkel gegeven door $x^2+(y-m)^2=r^2$. De coördinaten (x,y) van een eventueel snijpunt van die cirkel met de gegeven lijn voldoen dus aan $x=\pm\sqrt{r^2-m^2}$, $y = 0$ en dit geeft inderdaad nul (als $m > r$), één (als $m = r$) of twee (als $m < r$) snijpunten. Als er één snijpunt is, is de gegeven lijn de *raaklijn* aan de cirkel in het *raakpunt* (0,0).
Hiermee is tevens bewezen dat in het geval dat er twee snijpunten zijn, de bijbehorende koorde loodrecht middendoor wordt gedeeld door de y-as, dat wil zeggen door de lijn door het middelpunt van de cirkel die loodrecht staat op de gegeven lijn. En ook dat in het geval dat er precies één snijpunt is, de raaklijn loodrecht staat op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt.
We hebben drie vliegen geslagen in één klap.

Een tweede voorbeeld. Hoe bewijs je dat de verzameling van alle punten met gelijke afstand tot twee gegeven punten P en Q gelijk is aan de middelloodlijn van PQ? Simpel: kies cartesische coördinaten zo, dat $P = (a,0)$ en $Q = (-a,0)$. Dan geldt (zie figuur 2) voor een willekeurig punt $X = (x,y)$ dat

$$d(X,P)=d(X,Q)\Leftrightarrow\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$$

Via kwadrateren en vereenvoudigen leidt dit tot $-2ax = 2ax$ en dus tot $x = 0$ want $2a = d(P,Q) > 0$. Het punt $X = (x,y)$ heeft dus gelijke afstand tot P en Q dan en slechts dan als $x = 0$. Dat is de vergelijking van de y-as en dat is inderdaad de lijn die het lijnstuk PQ loodrecht middendoor deelt. Tevens blijkt hieruit dat de lijnen PX en QX gelijke hoeken maken met de middelloodlijn als X op de middelloodlijn ligt.
Als extraatje kun je op precies dezelfde manier nog bewijzen dat alle punten in het rechterhalfvlak dichter bij P dan bij Q liggen, en dat alle punten in het linkerhalfvlak dichter bij Q dan bij P liggen.

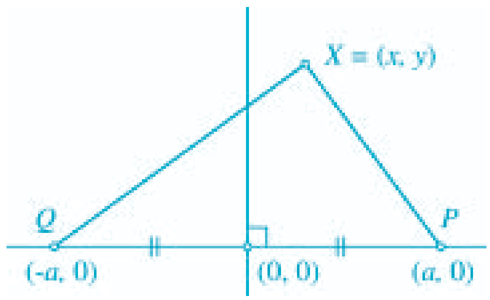
De $\mathbb{R}^2$ als model

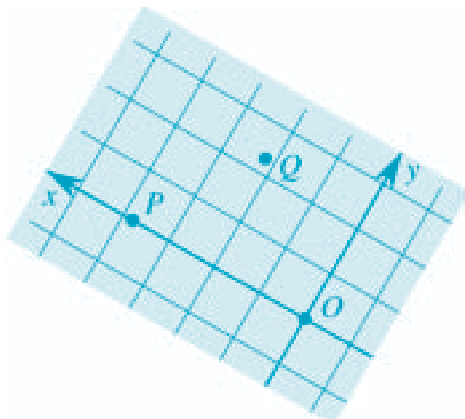
Wat de bovenstaande korte bewijzen mogelijk maakt, is de vrijheid die je hebt in het kiezen van een cartesisch coördinatenstelsel, dat wil zeggen een stelsel met onderling loodrechte assen en daarop gelijke schaalverdelingen. Met zo'n keuze creëer je een één-aan-één-verband tussen de punten van het vlak en de elementen van de $\mathbb{R}^2$ (de coördinaten van zo'n punt). Lijnen in het vlak worden dan gegeven door lineaire vergelijkingen en de afstand $d(P_1,P_2)$ tussen twee punten $P_1 = (x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$ is gelijk aan

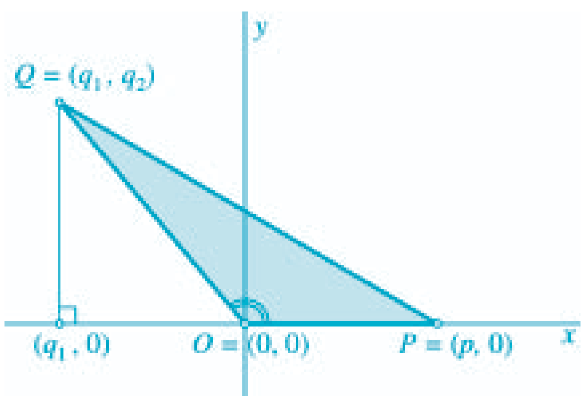
$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

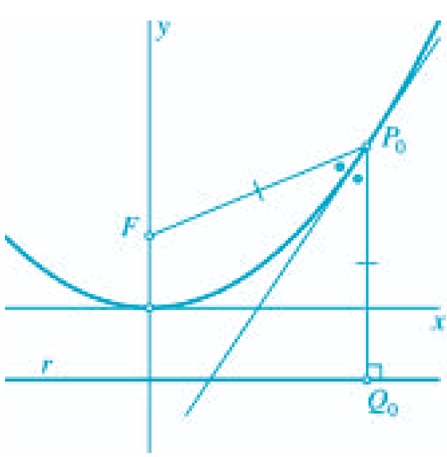
Waarom worden (rechte) lijnen in het vlak gegeven door lineaire vergelijkingen, en waarom wordt de afstand tussen twee punten gegeven door bovenstaande formule? Dat is eenvoudig een kwestie

FIGUUR 2 De middelloodlijn van PQ
FIGUUR 3 De basisstelling









FIGUUR 4 De cosinusregel

van *definitie*: een lijn in IR^2 is per definitie een deelverzameling van de vorm
$\{(x,y)\in \mathrm{IR}^2 \mid ax+by=c\}$
waarbij *a* en *b* niet beide nul zijn. En ook de afstandsformule is in deze context uitsluitend een definitie, hoe schokkend het voor sommigen ook is om een bijzonder geval van de *stelling van Pythagoras* hier als een *definitie* gepresenteerd te zien.

Maar natuurlijk komen die definities niet uit de lucht vallen: ze sluiten direct aan bij onze ervaring. In veel situaties waarbij we te maken hebben met een plat vlak met punten, rechte lijnen en afstanden, blijkt het bovenstaande wiskundige model van de IR^2 met de gegeven definities van lijnen en afstanden daar prima bij te passen. Men noemt zo'n model een *euclidisch vlak* als eerbewijs aan Euclides die meer dan tweeduizend jaar geleden de eerste systematische behandeling van de meetkunde publiceerde. Niet altijd zal zo'n euclidisch model trouwens voldoen: heb je bijvoorbeeld te maken met meetkundige problemen op het oppervlak van een bol of een ander gekromd oppervlak, dan kun je meestal beter een ander model kiezen.

Overigens, zoals altijd bij toepassingen van de wiskunde is het ook hier goed om onderscheid te maken tussen model en werkelijkheid, hoe verleidelijk het ook is om ze met elkaar te identificeren. Het wiskundige model IR^2 is een idealisatie, een bedenksel van de menselijke geest. Daarin hebben punten geen afmetingen en lijnen geen dikte, terwijl dat in de werkelijkheid die erdoor gemodelleerd wordt, natuurlijk wel het geval is. En de IR^2 strekt zich onbeperkt naar alle kanten uit, hetgeen bij een vlak in werkelijkheid nooit het geval kan zijn. Iets soortgelijks doet zich natuurlijk ook al voor als we de IR als model nemen van een tastbare lijn met een schaalverdeling erop, of als we de IR^3 als wiskundig model nemen voor de ons omringende ruimte.

Isometrische coördinatentransformaties

Ik noemde al de vrijheid die je hebt bij het kiezen van een cartesisch coördinatenstelsel. Wat gebeurt er als je een ander cartesisch coördinatenstelsel kiest? In dat andere stelsel zal de afstand van elk puntenpaar hetzelfde moeten zijn als in het oorspronkelijke stelsel. Voor elk tweetal punten P_1 en P_2 moet dus gelden dat $d(P_1,P_2) = d'(P_1,P_2)$, waarbij $d(P_1,P_2)$ de afstand in het eerste stelsel, en $d'(P_1,P_2)$ die in het tweede stelsel is. Anders gezegd, als we de coördinaten van P_1 en P_2 in het nieuwe stelsel met accenten, en die in het oude stelsel zonder accenten aangeven, dan moet gelden dat

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x'_1-x'_2)^2+(y'_1-y'_2)^2}$$

Een coördinatentransformatie die hieraan voldoet, heet *isometrisch*. De volgende stelling geeft een karakterisering van alle isometrische coördinatentransformaties van het euclidische vlak:

Stelling. Bij elk drietal punten *O*, *P* en *Q* in een euclidisch vlak die niet op één lijn liggen, is er precies één isometrische coördinatentransformatie met de

eigenschap dat O in het nieuwe stelsel in de oorsprong, P op de positieve x-as en Q in het bovenhalfvlak ligt.

De geldigheid ervan is intuïtief duidelijk: neem een transparant waarop een cartesisch coördinatenstelsel met de juiste schaalverdeling langs de assen getekend is, en leg die op het vlak met de oorsprong op O en P op de positieve x-as. Als Q dan al in het bovenhalfvlak blijkt te liggen, ben je klaar, anders moet je de transparant om de lijn OP omklappen (zie figuur 3).

Ook het bewijs van deze stelling is niet moeilijk. Stel dat $O = (a_1,a_2)$, $P = (b_1,b_2)$, $Q = (c_1,c_2)$ in het oorspronkelijke stelsel.

Noem $p = d(O,P) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$.

Het is een eenvoudige oefening in haakjes uitwerken en vereenvoudigen om te verifiëren dat de coördinatentransformatie

$$\begin{aligned} x' &= \frac{b_1-a_1}{p}(x-a_1) + \frac{b_2-a_2}{p}(y-a_2) \\ y' &= -\frac{b_2-a_2}{p}(x-a_1) + \frac{b_1-a_1}{p}(y-a_2) \end{aligned}$$

isometrisch is en dat in de nieuwe coördinaten geldt dat $O = (0,0)$ en $P = (p,0)$. Als in het nieuwe stelsel geldt dat de tweede coördinaat van Q positief is, zijn we klaar, en anders moeten we nog de isometrische coördinatentransformatie $x'' = x'$, $y'' = -y'$ toepassen. Hiermee is de existentie van zo'n transformatie bewezen. Een bewijs van de uniciteit laat ik aan de lezer over. Wie er niet uitkomt, kan de Syllabustekst van mijn bijdrage[1] aan de CWI-Vacantiecursus 1998 raadplegen, waar ik deze stelling als basis genomen heb voor een opbouw van de vlakke euclidische meetkunde. Op mijn homepage[1] staat een geactualiseerde versie van deze tekst.
Vrijwel alle meetkundestellingen van de formulekaart worden in de genoemde syllabustekst met behulp van de bovenstaande stelling bewezen. Elk bewijs is helder en slechts een paar regels lang. Sommige bewijzen verlopen in grote trekken hetzelfde als bij de traditionele, op Euclides teruggaande axiomatische behandelingswijze. Maar vooral bij de meer fundamentele stellingen is de winst groot, omdat zich daarbij wreekt dat een correcte, volledig axiomatische afleiding uiterst moeizaam en omslachtig is. Wat er nu dus op school gebeurt, is dat men die moeilijkheden achteloos onder tafel schuift en een grote collectie stellingen presenteert die de leerlingen zonder bewijs moeten accepteren. Leerlingen die naar achtergronden vragen, moeten met een kluitje in het riet worden gestuurd, want je kunt ze moeilijk verwijzen naar Hilbert, Van der Waerden of anderen die de omissies in de axiomatische opbouw van Euclides hebben gerepareerd. In [1] ga ik uitgebreider op deze problematiek in.

Meer voorbeelden

Hier wil ik nog een paar voorbeelden van korte, elegante bewijzen geven met behulp van coördinaten.

Ik begin met een bewijs van de cosinusregel.

Stelling (cosinusregel). Voor elk drietal verschillende punten O, P en Q geldt (zie figuur 4):
$d(P,Q)^2 = d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P)d(O,Q)\cos\angle POQ$
Bewijs. Kies coördinaten $O = (0,0)$, $P = (p,0)$ en $Q = (q_1,q_2)$ met $p>0$, $q_2 \geq 0$. Dan is $q_1 = d(O,Q)\cos\angle POQ$, dus

$$\begin{aligned} d(P,Q)^2 &= (p-q_1)^2 + (0-q_2)^2 = p^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 - 2pq_1 \\ &= d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P)d(O,Q)\cos\angle POQ \end{aligned}$$

Omdat $\angle POQ$ recht is dan en slechts dan als $\cos\angle POQ = 0$, volgen hieruit tegelijkertijd de stelling van Pythagoras en de omgekeerde stelling van Pythagoras. Een ander gevolg van de cosinusregel is de driehoeksongelijkheid:

Stelling (driehoeksongelijkheid). Voor elk drietal verschillende punten O, P en Q geldt:
$d(P,Q) \leq d(O,P) + d(O,Q)$
met gelijkheid dan en slechts dan als O op het lijnstuk PQ ligt.
Bewijs. Schrijf de cosinusregel als
$d(P,Q)^2 = (d(O,P)+d(O,Q))^2 - 2d(O,P)d(O,Q)(1+\cos\angle POQ)$
Hieruit volgt de driehoeksongelijkheid direct, met gelijkheid dan en slechts dan als $\cos\angle POQ = -1$, dat wil zeggen als O op het lijnstuk PQ ligt.

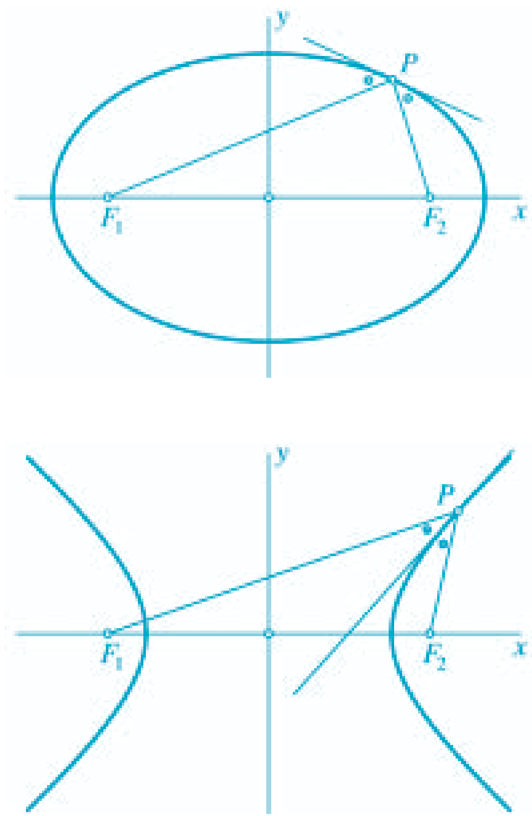
De parabool

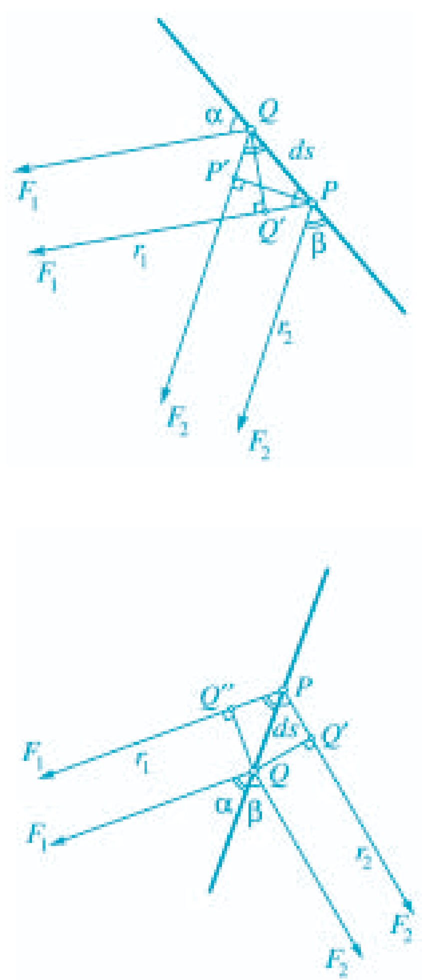
Op de formulekaart staan verder nog enige eigenschappen van parabolen, ellipsen en hyperbolen vermeld. Ook die kunnen met behulp van coördinaten snel bewezen worden. Ik begin met de parabool, die in deze context gedefinieerd wordt als de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een gegeven punt F (het brandpunt) en een lijn r (de richtlijn). Kies cartesische coördinaten zo, dat $F = (0,p)$ en zo, dat r de vergelijking $y = -p$ heeft. Dan geldt voor elk punt $P = (x,y)$ op de parabool
$d(P,F) = d(P,r) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-p)^2} = \sqrt{0^2+(y+p)^2}$
en die vergelijking kan worden vereenvoudigd tot $x^2 = 4py$ of, anders geschreven, $y = \frac{1}{4p}x^2$.
Neem nu een vast punt $P_0 = (x_0,y_0)$ op de parabool (zie figuur 5). Gezien de definitie ligt P_0 ook op de middelloodlijn van FQ_0, waarbij $Q_0 = (x_0,-p)$ het voetpunt is van de loodlijn uit P_0 op r. En omdat het de middelloodlijn is, maakt die lijn gelijke hoeken met FP_0 en Q_0P_0. De vergelijking van de middelloodlijn krijg je door $d(X,F) = d(X,Q_0)$ uit te werken:
$x^2 + (y-p)^2 = (x-x_0)^2 + (y+p)^2$
oftewel
$4py - 2x_0x + x_0^2 = 0$
Deze lijn gaat inderdaad door $P_0 = (x_0,y_0)$ want $x_0^2 = 4py_0$. Hij heeft richtingscoëfficiënt $x_0/2p$ en dus is het de raaklijn in P_0 aan de parabool.

Ellips en hyperbool

Een soortgelijke behandeling van de ellips en de hyperbool vergt wat meer rekenvaardigheid, maar moeilijk is het niet. Beide soorten krommen hebben

FIGUUR 6 De ellips en de hyperbool





FIGUUR 7 Bij het bewijs van de raaklijneneigenschap

twee brandpunten F_1 en F_2, en in deze context wordt een ellips gedefinieerd als de verzameling van alle punten P waarvoor $d(P,F_1) + d(P,F_2)$ constant is, terwijl bij de hyperbool de eis is dat $|d(P,F_1) - d(P,F_2)|$ constant is (zie figuur 6).

Ik begin met de ellips en kies een cartesisch coördinatenstelsel zo, dat $F_1 = (-c,0)$, $F_2 = (c,0)$. Een punt $P = (x,y)$ op de ellips moet dan voldoen aan

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

voor een zeker vast getal a met $a > c$. Kwadrateren en uitwerken geeft

$$2x^2+2y^2+2c^2+2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2$$

Delen door 2, wortels aan één kant isoleren en nogmaals kwadrateren geeft

$$((x+c)^2+y^2)((x-c)^2+y^2)=(2a^2-(x^2+y^2+c^2))^2$$

oftewel (wat zijn die merkwaardige producten toch handig!)

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=4a^4+(x^2+y^2+c^2)^2$$
$$-4a^2(x^2+y^2+c^2)$$

dus (vereenvoudigen en delen door 4)

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Met $b^2 = a^2 - c^2$ geeft dit na delen door a^2b^2 de gebruikelijke standaardvorm voor de ellips:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

De berekening bij de hyperbool is exact dezelfde (bij de tweede maal kwadrateren verdwijnt het minteken), alleen geldt hier $c > a$ en dus moeten we nu $b^2 = c^2 - a^2$ stellen, met als resultaat

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Om de raaklijneneigenschap van ellipsen en hyperbolen te bewijzen, gebruik ik een idee dat ook ten grondslag ligt aan vrijwel alle toepassingen van de calculus: lineariseren. Het gaat om de eigenschap dat voor elk punt P op een ellips of een hyperbool de lijnen PF_1 en PF_2 gelijke hoeken maken met de raaklijn in P (zie figuur 6). Het idee is nu om twee naburige punten P en Q op de ellips te nemen die zo dicht bij elkaar liggen, dat de lijn PQ praktisch gesproken met de raaklijn in P samenvalt. Om de gedachten te bepalen: maak de ellips zo groot dat $ds = d(P,Q)$ ongeveer een centimeter lang is en de afstanden $r_1 = d(P,F_1)$ en $r_2 = d(P,F_2)$ in de orde van grootte liggen van de afstand van de aarde tot de zon (zie figuur 7, boven).
Omdat de lijnen PF_1 en QF_1 dan (praktisch) evenwijdig zijn, maken ze dezelfde hoek α met PQ, en omdat PF_2 en QF_2 dan (praktisch) evenwijdig zijn, maken ze dezelfde hoek β met PQ. Noem Q' de projectie van Q op PF_1 en noem P' de projectie van P op QF_2. Dan is $dr_1=\mp d(P,Q')=\mp ds\cos\alpha$ de toename van r_1 en $dr_2=\pm d(Q,P')=\pm ds\cos\beta$ de toename van r_2 bij de overgang van P naar Q. (Merk op dat ze altijd tegengesteld van teken zijn als ds voldoende klein is!) Maar we weten dat $r_1 + r_2 = 2a$ constant is, en dus geldt $dr_1 + dr_2 = 0$, zodat $\alpha=\beta$, zoals bewezen moest worden. Het bewijs bij de hyperbool gaat vrijwel net

zo, alleen hebben daar dr_1 en dr_2 altijd hetzelfde teken wanneer ds voldoende klein is (zie figuur 7, onder).

Tot slot

Hierboven heb ik aansluiting gezocht bij moderne methodes in de meetkunde en de wiskunde in het algemeen. Let wel, ik voer hiermee geen pleidooi om de vlakke euclidische meetkunde in het programma voor de hoogste klassen van het vwo op te nemen of te handhaven. Integendeel, het lijkt me dat er verstandiger keuzes te maken zijn, bijvoorbeeld complexe getallen of eenvoudige vectorrekening. Wat je volgens mij op school als verplichte stof aan meetkunde zou moeten behandelen en hoe je dat zou moeten doen, staat in het *Basisboek Wiskunde*[2]. Maar als je op school toch voor de euclidische meetkunde kiest, bijvoorbeeld als keuzeonderwerp, behandel die dan op een manier die aansluit op de moderne wiskunde en die methodologisch goed voorbereidt op later gebruik van de wiskunde op hbo en universiteit, met name in de exacte en de economische studierichtingen. Denk bijvoorbeeld aan de techniek, de econometrie, de natuurkunde (mechanica, relativiteitstheorie) of aan *computer graphics*. Bij al die toepassingen begin je met verstandige coördinatenkeuzes.

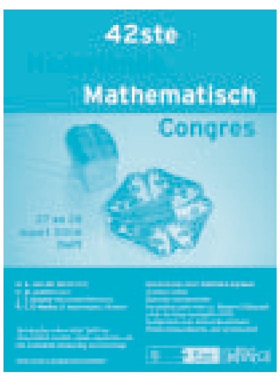
Noten

[1] Jan van de Craats: De vlakke meetkunde terug op school. In: Syllabus CWI Vakantiecursus 1998, Meetkunde, oud en nieuw, ISBN 90-6196-478-4, pp. 27-57.
Een geactualiseerde versie hiervan staat op mijn homepage: www.science.uva.nl/~craats.
Die syllabustekst bevat ook enige tientallen oefenopgaven. Ik heb het voornemen dit materiaal te zijner tijd voor liefhebbers verder uit te werken als een Zebra-boekje of iets dergelijks.
[2] Jan van de Craats, Rob Bosch: Basisboek Wiskunde. Amsterdam: Pearson Education Benelux (2005), ISBN 90-430-1156-8.

Over de auteur

Jan van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit.
E-mailadres: craats@science.uva.nl

Aankondiging / 42e Nederlands Mathematisch Congres



Op **maandag 27 en dinsdag 28 maart 2006** organiseert het Koninklijk Wiskundig Genootschap, in samenwerking met de Technische Universiteit Delft en de Universiteit Leiden, het 42e Nederlands Mathematisch Congres.

Nieuw

Er zal dit jaar voor het eerst de *Philips Wiskunde-prijs voor promovendi* worden uitgereikt. Tijdens een speciaal mini-symposium krijgen promovendi gedurende ongeveer 15 minuten de gelegenheid om over hun werk te vertellen. Uit de verschillende voordrachten zal een deskundige jury de in haar ogen beste selecteren.

Programma

Op het congres zullen verschillende hoofdsprekers een lezing houden. Ook staan enkele mini-symposia op het programma. Hieronder volgt een overzicht.
- Hoofdsprekers:
H.A. van der Vorst (UU), H.W. Lenstra (UL), J.T. Chayes (Microsoft Research, USA), R.E. O'Malley (U Washington, Seattle, USA)
- Special:
Beegerlezing door Manindra Agrawal (Kampur, India)
- Voordrachten:
S. Angenent (U Wisconsin, USA), B. Koren (CWI/TU Delft), D. den Hertog (KUB), J. Steenbrink (RU Nijmegen), H. Barendregt (RU Nijmegen)
- Mini-symposia:
Abelprijs-winnaars, Philips Wiskunde-prijs voor promovendi, Finance, Life Sciences, Wiskundeonderwijs, Numerieke Wiskunde
- Forumdiscussie:
'Realistisch wiskundeonderwijs versus abstract denken' met o.a. R.H. Dijkgraaf (UvA) en K. Hoogland (APS)

Locatie

Het NMC 2006 zal plaatsvinden aan de TU Delft in de faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI). Het adres van deze faculteit is Mekelweg 4, 2628 CD Delft.

Informatie en aanmelding

Zie voor overige informatie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/nmc2006/
De aanmelding voor het congres vindt elektronisch plaats via diezelfde website (klik op Aanmelden). Voor leraren in het voortgezet onderwijs zijn de kosten van deelname € 25,00 (inclusief lunches, koffie en thee).

Q.E.D.

Wiskundeonderwijs verwaarloost het bewijzen

[Dirk van Dalen]

De Wisconst eischt niets of 't bewyst
(Jan Luyken)

Wiskunde, waar gaat dat over?

Alle wetenschappen hebben zo hun karakteristieke kenmerken: biologen onderzoeken levende organismen, natuurkundigen bestuderen de eigenschappen van objecten onder bepaalde gezichtspunten, medici onderzoeken het menselijk lichaam met zijn samenstelling en zijn ziekten, de wiskunde bestudeert... Ja, wat eigenlijk? Verkeersopstoppingen onder bepaalde aannamen? De vorm van een touw dat de kerktoren met het gemeentehuis verbindt? De leeftijdsdistributie in pinguïnkolonies? Deze zaken, hoe nuttig ook, zijn geen wiskunde. Zeker, men past wiskunde toe om problemen van deze aard op te lossen. Dat wil zeggen, men formuleert een handig wiskundig systeem dat zo goed als het gaat de werkelijkheid nabootst, en werkt verder in dit systeem.

Wat is wiskunde dan wel, waar gaat het over? Het traditionele antwoord was: 'Wiskunde is de wetenschap van getal en ruimte.' Tegenwoordig zijn we niet meer tevreden met zo'n antwoord omdat er allerlei takken aan de wiskunde toegevoegd zijn die moeilijk onder 'getal' of 'ruimte' te schikken vallen. Men denke aan verzamelingsleer, waarschijnlijkheidsrekening etc. Wat het onderwerp van de wiskunde ook mag zijn, het is abstract zoals getallen, kegels, differentiaalvergelijkingen. Hoe komt het dat we iets over deze fantasie-objecten weten — sterker nog, hoe komt het dat we over deze dingen met meer zekerheid bekend zijn dan met de dingen uit de ervaringswereld? Het antwoord is: omdat we de eigenschappen *bewijzen*. Een bewijs verschaft ons de zekerheid dat in een rechthoekige driehoek de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk is aan het kwadraat van de hypotenusa, dat er oneindig veel priemgetallen zijn, dat een gelijkbenige driehoek twee gelijke hoeken heeft. Een bewijs is voor de wiskundige, wat een telescoop voor de astronoom is, wat het racket voor de tennisser is.

Bewijzen in het onderwijs: anti

Vreemd genoeg lijken bewijzen in het onderwijs in ongenade gevallen te zijn. Niet iedereen is daar gelukkig mee.

De anti-bewijzers hebben een aantal sterke argumenten: er is meer en belangrijker werk te doen dan bewijzen, denk maar aan het aankweken van ruimtelijk inzicht, het experimenteren met de computer, het gebruiken van wiskunde in realistische situaties. Bovendien is er nog meer dan bewijzen in de wiskundewereld: het 'free for all' van de wiskundige, bestaand uit verkennen, associëren, hypothesevorming, knutselen, ...

Inderdaad is dat *de* eigenschap waaraan men de meester herkent. De heel groten als Archimedes, Euler, Gauss, Brouwer, zij allen hebben de wiskunde vooruit geholpen door onorthodox, creatief te denken. Maar... na de geniale gedachten kwamen de bewijzen. Hoe leuk een idee ook is, je moet aantonen dat het klopt. Het lijkt misschien wat overdreven om een beroep te doen op het gezag van de groten van de wiskunde, maar in feite is dit een normale klaservaring. Leerlingen krijgen slimme

ideeën, lossen problemen op, en dan? Dan moeten ze zelf inzien (of anderen overtuigen) dat de oplossing doet wat hij belooft. En voor dat laatste zijn door de Grieken bewijzen uitgevonden, en later door anderen geperfectioneerd. De vraag is dan ook niet *of* er bewezen moet worden, maar eerder *hoe* dit didactisch in het vat gegoten moet worden. Dat is een serieuze vraag, en daar moet serieus over nagedacht worden.

Bewijzen in het onderwijs: pro

Het gelijk van de pro-bewijzers is echter aan geen twijfel onderhevig: zonder bewijzen geen exactheid. Maar ook zij zullen wat water in de wijn moeten doen. Volledige strengheid in het onderwijs zou veel te veel eisen, en bovendien de aardigheid voor leerlingen bederven. Je moet bewijzen op het geschikte moment en op het passende niveau, maar dan wel echt.
In ieder geval moeten leerlingen beseffen dat experimentele methoden wel suggestief zijn, maar niet afdoende. Een voorbeeld: hoe 'bewijs' je experimenteel dat $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$? Tik beide formules in op de zakrekenmachine en constateer dat je twee keer dezelfde grafiek krijgt. Iedere ervaren computergebruiker weet dat deze methoden je lelijk kunnen opbreken. Deze hulpmiddelen zijn handig, maar iedereen behoort te weten dat ze niets met een bewijs te maken hebben. Het ergste is wel dat dit deze methoden een schijnzekerheid verschaffen die te vergelijken is met de praktijk van de gebedsmolen. Je verricht bepaalde handelingen, waarvan de betekenis en de rechtvaardiging je volstrekt onbekend zijn, en je hebt niet eens de mogelijkheid in de zin van methodologische reflectie), laat staan de behoefte om je af te vragen of het resultaat relevant of betrouwbaar is.
Er is een klemmende vraag overgebleven: is bewijzen een esoterische sport van vakwiskundigen en hoef je er leken niet mee lastig te vallen? Zeer beslist niet, zelfs in niet-numerieke situaties heeft iedereen bewijzen nodig. Iedere redeneeractiviteit die tot een conclusie leidt vraagt om bevestiging door een bewijs. En hoe vroeger men went aan dit soort zindelijkheid, hoe beter. Men hoeft natuurlijk geen 'bewijsneurose' te ontwikkelen, maar wanneer de nood aan de man of vrouw komt moet een bewijs gegeven kunnen worden. Wiskunde is nu eenmaal geen opinie-onderzoek of een meerkeuzetoets.
De wetenschappelijke praktijk vraagt ook steeds dringender om bewijzen. Wiskundigen hebben zich altijd al netjes gedragen als het op bewijzen aankwam, maar nu meldt ook de informatica zich aan als 'bewijsafnemer'! Onoverzienbare programma's en protocollen moeten toch wel doen wat ze beloven. Ook u wilt dat de elektronica van uw vliegtuig u veilig op uw vakantieoord in Turkije brengt, en communicatie per satelliet moet wel naar behoren functioneren. Hier komt de meer gevorderde techniek van het bewijzen van pas, maar het principe is hetzelfde. Alles is hier grootschaliger, daar blijft het bij.
Zonder een degelijke beheersing van bewijstechnieken vallen de gevorderde exacte wetenschappen niet overeind te houden. Richard Dedekind zei het al: 'Wat bewijsbaar is, behoort in de wetenschap niet zonder bewijs geloofd te worden', en wat voor de wetenschap geldt, geldt in het bijzonder voor de harde kern: de wiskunde.
Leren bewijzen moet al vroeg gebeuren, daarom is een herwaardering van het bewijzen in havo-vwo een dringende noodzaak.

Pessimisme

Het onderwijs schijnt door een soort pessimisme bevangen te zijn, in de trant van 'laten we in hemelsnaam concrete problemen aan de klas voorleggen, want dat abstracte gedoe (met dat bewijzen) gaat er toch niet in'. Of dat pessimisme gerechtvaardigd is betwijfel ik. Preciezer gezegd: er zijn nog steeds genoeg leerlingen die abstractie wel aan kunnen.
Het schrikbeeld voor wiskundigen is een soort kookboekonderwijs: 'doe dit, probeer dat'. En maak de stapjes zo klein dat iedereen ze zonder enig nadenken kan maken. Als dat de voorbereiding van de jonge mens op zelfstandig functioneren is, dan ziet de toekomst er treurig uit. Tot mijn niet geringe ontsteltenis kwam ik een wiskundeschoolboek tegen waarin – bij het eerste doorbladeren – de vraag 'waarom?' nergens voorkwam. Jammer (of erger); immers, door welgekozen 'waarom's komen mensen tot betere redeneringen en tenslotte tot exacte bewijzen. Mannoury formuleerde het als: 'Een wetenschap die het vragen verleerd heeft, is het weten niet waard.'
Het verleggen van het accent naar locale slimheid begint ons op te breken. Het opdrogen van de bron van aanstaande wiskundigen (en in mindere mate, β -wetenschappers) kan niet los gezien worden van de opleiding en inspiratie die geboden wordt in het traject vóór het hbo en de universiteit. Bezinning op het secundaire wiskundeonderwijs is geen luxe, en de bewijsproblematiek ligt centraal in deze aangelegenheid.
Inmiddels bestaat bij de bètavakken het reservoir van promovendi al voor een substantieel deel uit slimme onderzoekers uit de voormalige Oostbloklanden en uit de derde wereld. Het zal niet lang meer duren of die promovendi vinden meer expertise en een betere begeleiding in hun eigen landen.
En dan komt het moment dat we inderdaad de exacte vakken kunnen afschaffen.

Noot

Dit artikel is een bewerking van een op 29 maart 1997 in de NRC verschenen bijdrage.

Over de auteur

Dirk van Dalen (1932) studeerde wiskunde en natuur- en sterrenkunde aan de Universiteit van Amsterdam. In 1979 werd hij benoemd tot hoogleraar logica en wijsbegeerte van de wiskunde aan de Universiteit Utrecht.
E-mailadres: dirk.vandalen@phil.uu.nl

BEGRIJPEN, REDENEREN, BEWIJZEN

[Menno van Steenis]

Tijdens een gesprek met enkele (oud)collega's over de toen voor het vwo vrij recent ingevoerde Euclidische vlakke meetkunde merkte iemand op: 'De leerlingen weten niet eens wat bewijzen is.' Daarop liet ik mij ontvallen: '*Eigenlijk* weet ik het ook niet.' Even viel er een stilte, verbeeldde ik mij.

Overzicht van dit artikel

Dit artikel gaat over synthese en analyse, en in het bijzonder het tot elkaar brengen van synthese en analyse.
Omdat synthese moeilijk te hanteren is stellen we eerst enkele vragen.
- Is er wiskunde mogelijk zonder overbrenging?
- Wat is de kern van het overbrengen van wiskunde?
- Wat bedoel je met: ik wil een bewijs begrijpen?
- Wat is de samenhang tussen synthese en analyse?
- Is een bewijs altijd noodzakelijk of volstaat begrip en omgekeerd?
- Bestaat er redeneren zonder bewijs en redeneren zonder begrip?

Het is beslist niet de bedoeling antwoorden op deze vragen te geven; ze dienen alleen als aanzet tot overdenken.
Omdat het overbrengen van wiskunde vaak noodgedwongen een meer analytisch karakter heeft, zal dit artikel meer op synthese zijn gericht, waardoor het artikel (nog) meer het karakter van een aanzet krijgt.

Eerst probeer ik de woorden
- begrijpen
- redeneren
- bewijzen

beter te doorzien door ze in samenhang te zien met andere woorden, te beginnen met *samenhang* en *geheel*.
Om deze woorden beter te begrijpen zijn er weer woorden nodig. De steeds groeiende woordenhoeveelheid vormt een onaf maar *samenhangend* 'netwerk' van woorden, dat de woorden *beter* doet *begrijpen* en verduidelijkt. Dit netwerk vormt een onaf geheel, immers voor ieder woord wat ik (beter) wil begrijpen, heb ik woorden nodig en om die weer te begrijpen weer (nieuwe) woorden, enzovoort. *Tegelijkertijd* met het construeren van een samenhangend netwerk van woorden geef ik voorbeelden uit de wiskunde. Deze wiskundige voorbeelden vormen de kern van het artikel. De voorbeelden komen meestal uit wat vaak 'elementaire' meetkunde wordt genoemd. Met deze (kleine) voorbeelden probeer ik aan te geven wat ik versta onder de woorden *samenhang*, *geheel*, *beter*, en *begrijpen* in de wiskunde. Op dezelfde wijze als met de groeiende hoeveelheid samenhangende woorden, kan ik een onaf netwerk opbouwen van samenhangen in de wiskunde op een manier zoals aangegeven is in de voorbeelden. Uiteindelijk ontstaat er op die manier wiskunde als een onaf netwerk.
De woorden *begrijpen*, *samenhang*, *synthese*, *analyse*, *redeneren* en *bewijzen* vormen een leidraad voor de onderstaande beschouwing.

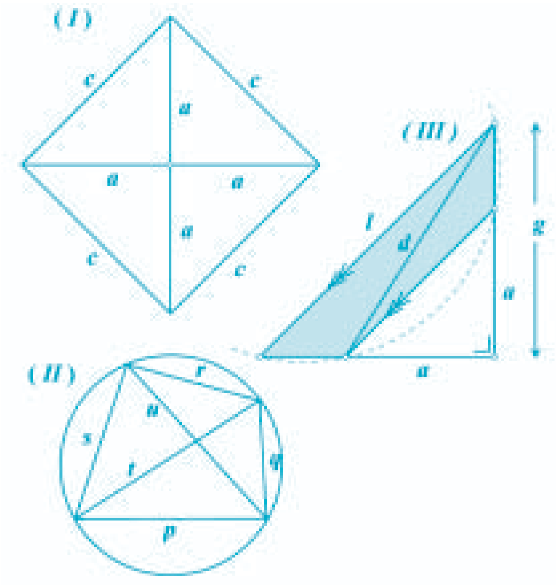
Onderwijl komt ter sprake dat wiskunde altijd reële wiskunde is. Daarna besteed ik aandacht aan de didactiek van de wiskunde en geef ik aanwijzingen dat *de didactiek van de wiskunde de wiskunde zelf is*.

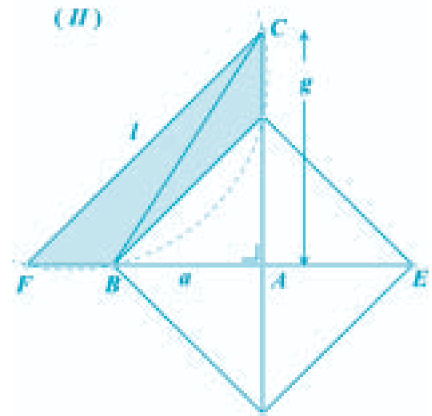
Begrijpen, synthese, analyse

Van de woorden naar de wiskunde.

Hoe meer samenhang ik zie, hoe beter ik wiskunde begrijp.

Ik teken een cirkel met een koordenvierhoek en zijn diagonalen: zie ik ook *samenhang* in deze figuur? Vervolgens teken ik een driehoek met een rechte hoek. Zie ik ook samenhang tussen beide tekeningen, die ieder op zich zijn voorzien van een samenhang? Kan ik de twee *gehelen* tot één *geheel* maken?





FIGUUR 1

FIGUUR 2

Voorbeeld 1a. Een *samenhang* tussen de stelling van Ptolemaeus en de stelling van Pythagoras.
Zie figuur 1.
(*I*) Bijzonder geval van de stelling van Pythagoras: de oppervlakte van het vierkant is $4\times\left(\frac{1}{2}a^2\right)=c^2$ of $c=a\sqrt{2}$.
(*II*) Stelling van Ptolemaeus in een koordenvierhoek: $pr + qs = tu$
(*III*) De lijnstukken *z c z l* vormen een gelijkbenig trapezium (en dat is een koordenvierhoek). Ik weet dan (volgens de stelling van Ptolemaeus):
$d^2 = (g - a)(g - a) + cl$
of
$d^2 = g^2 + a^2 - 2ag + cl$
Conclusie: $c=a\sqrt{2}$ geeft ook $l=g\sqrt{2}$, en dan blijkt dat $cl = 2ag$.
En uit (*III*) vinden we dan: $d^2 = g^2 + a^2$.
Merk op: uit een bijzonder geval van Pythagoras komt het algemene.

Voorbeeld 1b. Niet alleen is het mogelijk *uit* het bijzondere het algemene te krijgen, maar vind je in dit geval ook al *met behulp van* de tekening een bewijs. De tekening bevat of (eigenlijk) *is* de samenhang.
Zie figuur 2.
Laat nu de natuurlijke samenhang spreken door alleen de figuur van het bijzondere geval aan de figuur van het algemene geval te koppelen.
Op dezelfde manier als in voorbeeld 1a bij (*III*) vinden we:
(*I*) $d^2 = g^2 + a^2 - 2ag + cl$
(*II*) Nu is $BDE \sim ACF$ (*hh*), zodat $BE : BD = AF : AC$ of $2a : c = l : g$, waaruit we vinden: $cl = 2ag$.
En natuurlijk dezelfde conclusie: $d^2 = g^2 + a^2$.

De voorbeelden 1a en 1b blijken dicht bij elkaar te liggen, als je naar het resultaat kijkt. Maar wat betreft *samenhang* en *gehelen* geeft voorbeeld 1b een vergezicht.

De voorbeelden 2 en 3 gaan over *gehelen* en *geheelvorming* naar aanleiding van [7].

Voorbeeld 2. Afgeknotte kegel - *B* en *G* zijn de oppervlaktes van het boven- en grondvlak van de afgeknotte kegel. Hierbij: $\sqrt{B}+\sqrt{G}$ wordt een *geheel.*
Ik wil laten zien dat de formule voor de inhoud van een afgeknotte kegel op een tweede manier kan worden geschreven.
Zie figuur 3.
Toon aan dat (met $h = h_1 - h_2$):
$h(B+G+\sqrt{BG})=h_1G-h_2B$ (de factor $\frac{1}{3}$ is weggelaten)
We werken toe naar de gehelen:

$$h_1B+h_1G+h_1\sqrt{BG}-h_2B-h_2G-h_2\sqrt{BG}\overset{?}{=}h_1G-h_2B$$

of $h_1B+h_1\sqrt{BG}\overset{?}{=}h_2G+h_2\sqrt{BG}$ of

$$h_1\sqrt{B}\cdot(\sqrt{B}+\sqrt{G})\overset{?}{=}h_2\sqrt{G}\cdot(\sqrt{G}+\sqrt{B})$$

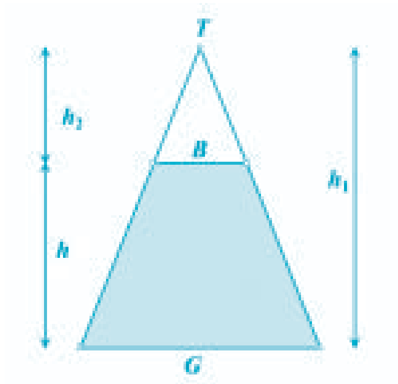
of, met $\sqrt{B}+\sqrt{G}$ als een geheel: $h_1\sqrt{B}\overset{?}{=}h_2\sqrt{G}$, zodat

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{B}}$$

en dit laatste is waar!

Merk op dat de distributieve eigenschap een fundamentele *samenhang* geeft tussen optellen en vermenigvuldigen, wat kan leiden tot *geheelvorming*:
5 appels + 2 appels = (5 + 2) appels

Voorbeeld 3. Afgeknotte kegel - Een afbeelding is de vorming van een *geheel.*
Zie weer figuur 3.
Het getal *k* is de vermenigvuldigingsfactor die de kleine kegel afbeeldt op de grote kegel.
Dus $kh_2 = h_1$ (en genoteerd als afbeelding: $k(h_2) = h_1$)
en $G = k^2B$.
En dan bekijken we (weer na vermenigvuldiging met 3):
$(h_1-h_2)(B+G+\sqrt{BG})\overset{?}{=}h_1G-h_2B$
Via de vermenigvuldiging met *k*:



FIGUUR 3

$(kh_2 - h_2)(B + k^2B + \sqrt{k^2B^2}) \stackrel{?}{=} kh_2 \cdot k^2B - h_2B$

En, na deling door B en door h_2:
$(k-1)(k^2+k+1) = k^3 - 1$
En dit laatste klopt!

Samenhang zien en gehelen maken vormen het wezen van synthese.

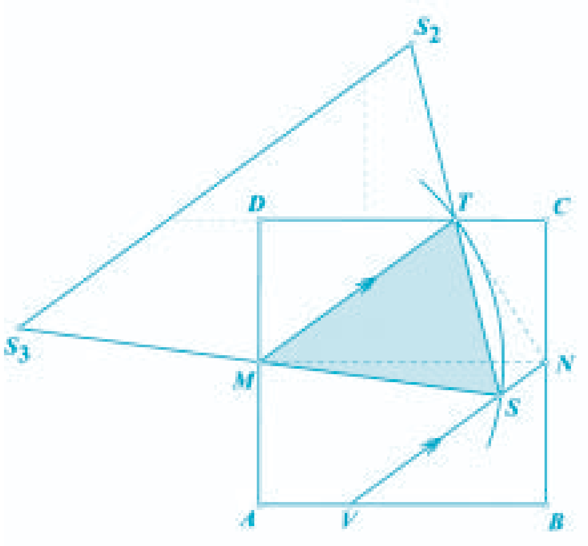
Voorbeeld 4. Dit voorbeeld gaat over het doen overgaan, door draaiingen, van een vierkant in een gelijkbenige driehoek (zie daarvoor ook [6]).
Zie figuur 4a op pag. 222.
Ga uit van het vierkant *ABCD*. *M* en *N* zijn de middens van opvolgend *AD* en *BC*. *V* is een variabel punt op het lijnstuk *AB*. Maak *MT* evenwijdig aan *VN*. Dan is *VN* = *MT* = *MS*.
Door *S* te schuiven over *VN* naar *N* kunnen we uit de figuur zien dat Opp(*MST*) = Opp(*MNT*).
Door *T* naar *C* te schuiven over *DC* kunnen we zien dat Opp(*MNT*) = Opp(*MNC*) = ½·Opp(*MNCD*).
Dus Opp(*MST*) = ½·Opp(*MNCD*) = ¼·Opp(*ABCD*).
Vermenigvuldig nu driehoek *STM* t.o.v. *S* met 2 tot SS_2S_3 (figuur 4a). Dan heeft de ontstane driehoek dus dezelfde oppervlakte als *ABCD*.
En in figuur 4b is dan te zien hoe vierkant *ABCD* na de aangegeven spiegelingen de driehoek SS_2S_3 volledig bedekt.

Je ziet in dit voorbeeld duidelijk het verschil tussen (synthetische) meetkunde en analytische meetkunde. De (over)oneindige getallen zijn verdwenen, lijnen zijn geen getallenlijnen, maar gehelen: de analyse breekt de *gehelen* in stukken.

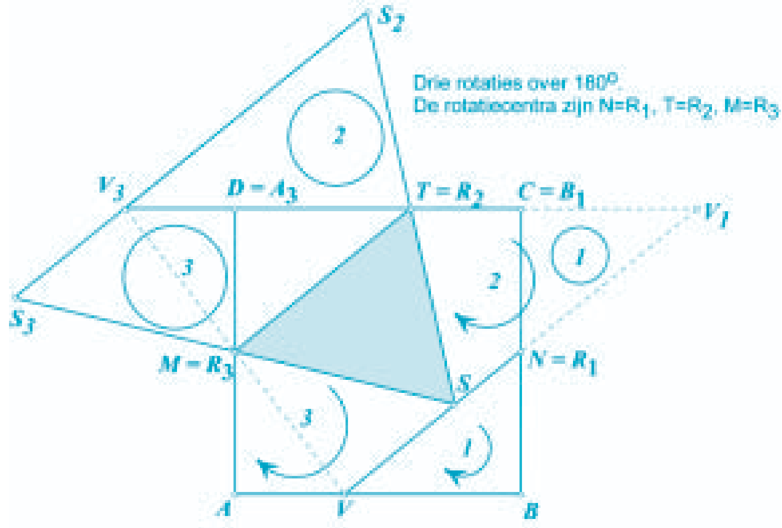
Bewijzen (en redeneren)

We hebben nu de woorden *begrijpen, synthese* en *analyse* aan bod laten komen.
Nu het woord *bewijzen*. Bij *bewijzen* gaat het om communicatie. Als ik iets wil bewijzen, wil ik iemand anders iets duidelijk maken; ik wil iemand anders doen *begrijpen* wat ik zelf heb *begrepen*. Hiervoor gebruik ik communicatiemiddelen en terwijl ik die gebruik, vraag ik steeds: begrijp je het nu? Je zou dus bijna kunnen zeggen dat er zonder communicatie geen wiskunde is.
De traditie wil dat ik als communicatiemiddel het *redeneren* gebruik, waarbij ik 'waarheden' aan elkaar probeer te rijgen. Het snoer wat zo geregen wordt moet een duidelijk begin en eind hebben. Soms heb je geen ander begin dan de aanschouwing en moet je letterlijk zeggen: 'Zie je wel?' Dit is bijvoorbeeld het geval met een begin dat bestaat uit lijnen en punten. Wat zijn eigenlijk lijnen en punten? Een antwoord op deze vraag kan niet gegeven worden met behulp van de analytische meetkunde, want dan stuit je op de oneindigheidskwesties van de overoneindige reële getallen. Ook als je vraagt: 'Wat zijn natuurlijke getallen?', moet je eigenlijk antwoorden met een plaatje: 'Zie je wel!'

Hilbert gebruikt dan aantallen streepjes (zie [4, p. 69]). In dit verband gebruikt hij het woord *physisch*.
Wanneer we bewijzen als een redenering met een begin en een eind zien, dan moeten we oppassen daarmee het niet-lineaire van de wiskunde uit het oog te verliezen. Bovendien loert dan het gevaar dat je de wiskunde als *geheel* een begin en een eind toe wilt kennen.
Die streepjes haal je, net als Hilbert, hoe dan ook uit de realiteit. Maar in dat geval is alle wiskunde reële wiskunde.
Zowel Brouwer als Kant proberen beiden de reële wereld in het brein te trekken.
Brouwer begint met de eenheid, dan kan hij maken de twee-eenheid, de drie-eenheid, enzovoort; dat noemt hij het continuüm. Deze twee vormen de oerintuïtie van het discrete en het vloeiende; hij brengt hiermee de kenbare wereld als het ware binnen de hersenen.
Je zou het ook anders kunnen zeggen: ik begin met iets, een geheel. Is er ook samenhang met een tweede



FIGUUR 4a



FIGUUR 4b

ding? Zo ja, dan vorm ik samen een nieuw geheel, enzovoorts. De meest uiteenlopende dingen, ook wiskundige, kunnen verborgen zitten in deze gehelen. Het vloeiende beschouw ik vooralsnog als een geheel, bijvoorbeeld als een lijn.
De gemaakte steeds *groeiende* gehelen nopen tot een onzekerheid bij de waarheidsvraag: waar, niet waar of ik weet het (nog) niet. Dit komt dus uit het onaf blijven van de steeds gevormde gehelen.
De wiskunde beschouw ik niet als een vooraf gegeven geheel, maar als een steeds groeiend geheel van samenhangen. Bovendien denk ik dat je kunt beginnen waar je wilt.
Brouwer gaat nu de twee delen van de oerintuïtie combineren, een continuüm construeren, de reële getallen tevoorschijn laten komen. De moeilijkheid zit natuurlijk in de genoemde onzekerheid, als je het heel simpel zegt: hoe kun je met punten zonder afmeting een lijn vullen. Dit lost Brouwer op ingenieuze, wiskundige manier op.
We zien dus dat de oerintuïtie van de groeiende gehelen (de natuurlijke getallen en de lijnen) het idee van de synthese weergeven, er vormt zich steeds iets nieuws, terwijl het construeren van de reële getallen het analyseren van het geheel voorstelt. Kant zegt het in [5] (een versimpeling gebruikend) zó: Als je beweert over een bol: 'De bol is rond', dan is dat een *analytisch* oordeel. Daarentegen, 'die bol is rood' is een *synthetisch* oordeel. Hiermee voeg je iets nieuws aan de bol toe. Geen verwarring mag ontstaan met het woord 'analyse' in bovenstaande zin en de analyse als onderdeel van de wiskunde, want natuurlijk is de wiskunde in het algemeen afhankelijk van het zien van samenhangen. Opmerking: het ene onderdeel van de wiskunde is waarschijnlijk rijker aan samenhangen dan het andere. Zie bijvoorbeeld de analyse (rijker) en de getaltheorie. Beschouw nu het aantal wortels van een vergelijking met reële coëfficiënten: er bestaat samenhang tussen de voorkomende reële getallen en de aantallen wortels die mogelijk zijn. Weet je iets over de (reële) coëfficiënten, dan weet je iets over natuurlijke getallen.

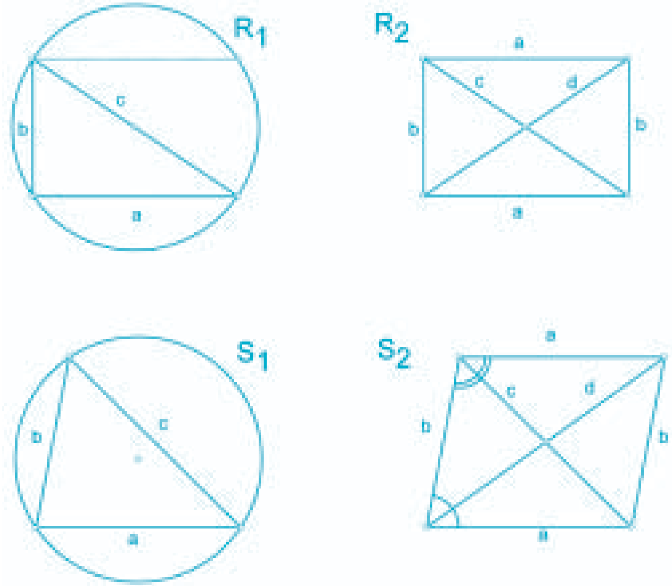
De bovenstaande twee gehelen van Brouwer (dus: het groeiend geheel van natuurlijke getallen en het groeiend geheel van lijnen) bepalen nu juist de synthetische onderdelen van de wiskunde: enerzijds de meetkunde, anderzijds de getaltheorie, met daartussen (of beter: daaromheen) de algebra. Het zijn ook juist de gebieden uit de begintijd van de wiskunde. Sporen van de analyse waren er al bij Eudoxos met zijn reële getallen. Een analytische opzet vind je bij Euclides, en bij Archimedes in bijvoorbeeld zijn bepaling van de oppervlakten van paraboolstukken. Bij de analytische meetkunde van Descartes en bij de infinitesimaalrekening van Newton en Leibniz. En deze analyse heeft de ontwikkeling mogelijk gemaakt van onze greep op de ons omringende zintuiglijk waarneembare realiteit: de techniek.

Dus als we de synthese vanuit de analyse bekijken is het 'geheelvorming', en als we de analyse vanuit de synthese bekijken is het 'in stukken splitsen'.
Anders gezegd: het lineaire tegenover het niet-lineaire, resultaat tegenover samenhang.

Didactiek

De didactiek van de wiskunde is de wiskunde zelf.

Allereerst citeer ik Derksen en De Laive (zie [2], een boek voor onderwijzers):
'Over het oplossen van meetkundige vraagstukken... Er zijn drie soorten van bewijzen in de Meetkunde. Een bewijs kan zijn:
a. indirect
b. synthetisch
c. analytisch.
De synthetische methode gaat rechtstreeks op haar doel af, en wel door het trekken van hulplijnen, of door het toepassen van bekende eigenschappen, waarvan de



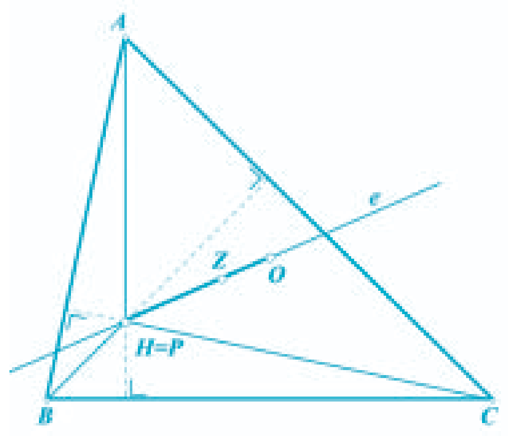
FIGUUR 5

genoemde een noodzakelijk gevolg is. Deze methode eist een grote mate van geoefendheid, en is bij vraagstukken die niet veel overeenkomst vertonen met reeds bekende, in de meeste gevallen niet te gebruiken.
De analytische methode kent deze bezwaren niet en is daarom het meest aan te bevelen. Zij bestaat hierin, dat men, na een nauwkeurige tekening te hebben gemaakt van de figuur waarvan men een eigenschap bewijzen wil, deze figuur goed onder de ogen ziet; niet uit het oog verliest, wat men bewijzen moet; voet voor voet de kwestie terugbrengt, door gebruikmaking van bekende eigenschappen, tot een andere die men als waar erkent en die omgekeerd de gestelde eigenschap wederkerig tot gevolg moet hebben. [Dit zet men als proces door] tot men gekomen is op een eigenschap, die men als waar erkent en waaruit de waarheden van de vorige eigenschappen, zijnde wederkerig, moeten voortvloeien. Deze methode eist meer meetkundig denken en verstandig overleg; zij verdient daarom eerder aanbeveling dan de synthetische. De laatste heeft altijd iets kunstmatigs. Toch, hoe eenvoudig de analytische methode ook schijnt, men moet over een groot aantal eigenschappen die veelvuldig voorkomen kunnen beschikken.'

De bedoeling is dat alle opmerkingen over didactiek (of: overbrenging van gedachtegoed) in de voorbeelden en beschouwingen van dit artikel zijn terug te vinden. Eerst enkele woorden over het citaat van Derksen en De Laive.
Inhoudelijk komt het kernpunt duidelijk naar voren. Men gaat uit van een analytische opzet, namelijk het oplossen van een meetkundig vraagstuk, en misschien daardoor is er nauwelijks uitleg van de synthetische methode. Het woord 'oplossen' heeft al min of meer een analytische achtergrond, omdat er een begin en een eind wordt gesuggereerd. Het is alsof van tevoren de keus al vast staat: is de druk van de eeuwenoude opbouw, die van Euclides, te groot? Het lijkt of dit nog steeds zo is. We praten nog steeds over meetkunde in de zin van Euclides.

Voorbeeld 5. *Samenhang* van driehoek en vierhoek; 'recht en scheef.'
Zie figuur 5.
R_1 en R_2 zijn 'recht', S_1 en S_2 zijn 'scheef'. R_2 is een rechthoek en S_2 een parallellogram.
In R_1 geldt $a^2 + b^2 = c^2$, in S_1 niet. In R_2 geldt dat $2a^2 + 2b^2$ gelijk is aan de som van de kwadraten van de diagonalen (*), maar dit klopt ook in de scheve vierhoek S_2. Het is in te zien door twee keer de cosinusregel toe te passen.
Je zou kunnen zeggen: het parallellogram heeft meer *samenhang* dan de driehoek.
Met een kleine omzetting van (*) krijg je de zwaartelijnstelling, dat wil zeggen de lengte van de zwaartelijn in een driehoek, uitgedrukt in de zijden van die driehoek.
Vroeger zei men: heb je een vraagstuk over de zwaartelijn, verleng die met zichzelf; maak van de driehoek een vierhoek (uitspraak a). En ook: heb je een vraagstuk over een trapezium, maak een driehoek door de opstaande zijden te verlengen (uitspraak b).
Doordat men op resultaat werkte keek men (toen) niet verder. Maar voortbouwend op uitspraak a: er zijn natuurlijk veel bijzondere vierhoeken, waarvan je de samenhang kunt gebruiken voor een driehoek (zie voorbeeld 1 hierboven). En op uitspraak b: ook van een driehoek zijn veel bijzonderheden bekend die je bij een vierhoek kan gebruiken.

Ik doe de schrijvers van het bovenstaande citaat overigens tekort als ik niet vermeld dat zij beginnen met enkele '*grote voorbeelden*': voorbeelden die aanleiding kunnen geven tot het *zien* van veel *samenhang*, met de nadruk op *kunnen*. Helaas volstaan de schrijvers alleen met bewijzen. Je zou kunnen zeggen: de grote voorbeelden kunnen dienen als



FIGUUR 6

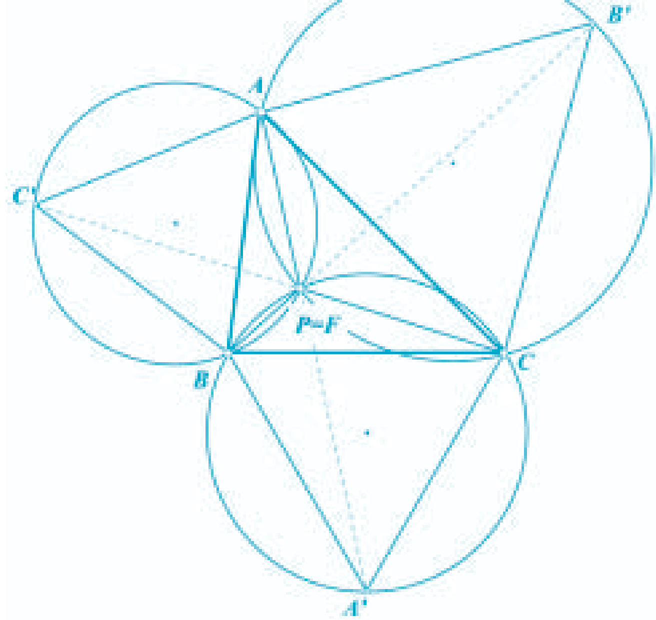
voorbeelden van '*gehelen* vormen'; ze zien echter geen *samenhang*(!) met synthese.
Bekijk voorbeelden van tevoren niet vanzelfsprekend als vraagstukken die je wilt (of moet) bewijzen, maar ga eerst vooral na of je ook samenhangen ziet. Dit bedoel ik met een andere manier van kijken.
Let ook op de gegeven voorbeelden, waarbij samenhang van een bijzonderheid iets algemeens maakt.

Het eerste 'grote voorbeeld' (uit Derksen en De Laive), ook genoemd in [3, p. 47] luidt:
In driehoek ABC is Z het zwaartepunt en P een willekeurig punt; de zijden van de driehoek zijn a, b, c. Nu geldt:
$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PZ^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$
Als een bijzonder geval van dit voorbeeld volgt hieruit de afstand tussen het hoogtepunt H en het middelpunt O van de omcirkel (op de Euler-lijn e van de driehoek); zie figuur 6 (andere bijzondere keuzes van het punt P leveren andere onverwachte samenhangen).
Bovendien is er ook samenhang in de tekening(!) (groot voorbeeld 2; zie figuur 7) van een driehoek ABC met z'n Fermat-punt F (te construeren via gelijkzijdige driehoeken op de zijden van de driehoek)[i]. Die figuur is op zich uit te breiden tot zeer veel samenhangen waarvan ik sommige wel en vele (nog) niet kan bewijzen.
Tenslotte is er de samenhang met de stelling van Ptolemaeus (groot voorbeeld 3) die weer een bron is van vele ongekende samenhangen (zie weer voorbeeld 1 hierboven). 'Ptolemaeus' sluit dan weer aan op de prominente rol van de cirkel.
Je moet natuurlijk die samenhangen wel zien; maar steeds geldt: samenhangen zien, doet samenhangen zien.

Consequenties voor wiskundeonderwijs

Behandel een synthetische discipline ook zoveel mogelijk synthetisch. Vooral de meetkunde (hier de elementaire) is een goede mogelijkheid om te laten zien wat samenhangen zijn omdat de mogelijkheid bestaat dat je zonder redeneren letterlijk de samenhang kunt zien, simpel gezegd je *ziet* het goede 'hulplijntje'.
Ik denk dat je door de nadruk te leggen op het zoeken naar mogelijke samenhangen, langzamerhand de samenhangen in een gegeven tekening makkelijker 'vanzelf' kunt zien, maar het is vanzelfsprekend dat ook redeneren samenhangen kan oproepen. Zoals ik in het overzicht al heb aangegeven valt de nadruk op de synthese, want dan kan men pas met recht proberen, redeneren en samenhangen zien bij elkaar te brengen.
Je zou kunnen denken aan: als de samenhangen 'dicht tegen elkaar aanliggen' dan gaat het op redeneren lijken. Het gaat dus niet zozeer om een tegenstelling maken tussen redeneren en samenhangen zien, maar om het fixeren op een bewijs, op resultaat van opgave.
Dit neemt niet weg dat ik het *expliciete* gebruik van meetkunde om te leren redeneren niet juist kan vinden.
Maar vooral baart mij zorgen de discrepantie tussen de (inhoudelijke) moeite die wordt besteed aan het meetkundeonderwijs en wat er uiteindelijk op de examens tevoorschijn komt, liever gezegd kan komen.
Ik denk dat de meetkunde, zeker zoals ik het zie, uiteindelijk naar het schoolonderzoek verschoven moet worden en ook de manier van het afnemen van dit schoolonderzoek anders zal moeten, mogelijk zelfs in groepjes en met een lange tijdsduur.

Het gaat erom de meetkunde echt op een andere manier te *zien* (bijna letterlijk). De figuur (de tekening, het plaatje) *bevat*, zelfs *is* de samenhang.
Didactisch zou je van alle *samenhangen* die je *ziet* plaatjes kunnen maken. Met kleuren, met herkenbare symbolen en wat je maar kan verzinnen, zodat je de samenhang kunt *zien* en hoe ingewikkelder de samenhang is, hoe meer plaatjes. Ik heb in dit verband wel eens gedacht aan een computersysteem met meerdere beeldschermen.
Voor het vinden van nieuwe samenhangen is het van het grootste belang om zoveel mogelijk samenhangen



FIGUUR 7

tussen twee objecten te zoeken. Uiteindelijk gaat het er om: *begrijp* ik een bepaalde samenhang *beter*? Het is duidelijk dat hoe meer samenhangen ik zie, hoe beter dit 'proces van begripsontwikkeling bij de leerling' zich ontwikkelt. De moeilijkheid zit natuurlijk in *een* start van dit proces; ik denk dat een programma als *Cabri Geometry* hier bijna noodzakelijk is. Uiteraard kun je met Cabri hele mooie schetsen maken, maar het gaat er ook om 'zomaar' naar verbanden te zoeken en deze verbanden met het programma, als het kan, te laten controleren, in het begin met hulp van de docent.
Door de strakke opbouw van de meetkunde in vraagstukken en stellingen zijn bijna alle te behandelen vraagstukken al bekend. Wat nog erger is: ieder gebruikte steeds dezelfde oplossingen. Het gevolg is erg weinig nieuwe samenhangen in de leerboeken te vinden zijn: men schreef gewoon steeds van elkaar over, met bewijs en al (zie weer [3, p. 47]). Het lijkt er echter op dat er met het meetkundedeel van *Moderne wiskunde* (zie [8]) wel een kentering naar meer *samenhang* is ingezet. Het is dan bijna onmogelijk tot goed *begrijpen* te doen komen. Uit eigen ervaring weet ik hoe moeilijk het is echt te *begrijpen*, wat een vraagstuk (*samenhang*) inhoudt: de moeilijkheden te *zien* als je zelf niet op zoek gaat naar onverwachte samenhangen. Dit is mogelijk een gevolg van de analytische aanpak, die op resultaat gericht is: een andere kijk op de meetkunde is absoluut noodzakelijk. Het centraal schriftelijk examen, dat binnen een beperkte tijd wordt afgenomen, speelt hierin uiteraard ook een grote rol: vanwege de tijdbeperking wordt alleen maar de analytische aanpak genomen.

Tot slot

Dat het bewijs door redeneren als resultaat tevoorschijn moet komen en niet hoe men eraan gekomen is, blokkeert bijna natuurlijkerwijze het vinden van nieuwe *samenhangen* en dus het *beter* begrijpen. Niet voor niets is een gangbare uitspraak bij een (analytisch) bewijs: ik heb het bewijs voor me, nu moet ik het nog begrijpen.
Gevraagd aan de leerlingen, dan zeggen zij onmiddellijk: 'Wiskunde moet je *begrijpen*.' Dit is waarschijnlijk de reden waarom zij met zoveel plezier aan meetkunde werken: zij kunnen daar zelf op zoek gaan naar *samenhangen*.

Noot (red.)

[i] Voor het Fermat-punt van een driehoek geldt dat som van de afstanden van dat punt tot de hoekpunten minimaal is.

Referenties

[1] Dirk van Dalen: L.E.J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde. Utrecht: Epsilon Uitgaven (2001).
[2] H.A. Derksen, G.L.N.H de Laive: Leerboek der vlakke meetkunde, vierde deel. Zutphen: W.J. Thieme en Cie (1913).
[3] A.J. Goddijn: Een kast vol voorwoorden. In: Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs 21(1) (2001); pp. 45-50.
[4] Leon Horsten: Eindig, Oneindig, meer dan Oneindig. Utrecht: Epsilon Uitgaven (2004).
[5] Immanuel Kant: Kritik der reinen Vernunft (1781). Nederlandse editie: Kritiek van de zuivere rede. Amsterdam: Boom (2004).
[6] Rob van Oord: Van vierkant naar gelijkzijdige driehoek. In: Euclides 80(7) (2005); pp. 380-381, 386.
[7] Ab van der Roest: Een bijzonder gemiddelde. In: Euclides 80(7) (2005); pp. 284-285.
[8] A. van Streun e.a.: Moderne wiskunde, B2 deel 1. Groningen: Wolters-Noordhoff (1999).

Over de auteur

Menno van Steenis (1933) studeerde in 1958 af in de wiskunde. Hij was daarna tot 1995 actief als docent wiskunde in het Voortgezet Onderwijs en als begeleider van beginnende wiskundeleraren. Hij is altijd bezig geweest met de vlakke meetkunde en met wiskundige structuren in het algemeen.
E-mailadres: m.van.steenis@wolmail.nl

8 Wiskunde die ...

[Bert Zwaneveld]

Méér nadenken dan standaard

In een recente aflevering van Pedagogische Studiën, in een artikel van Seezink en Van der Sanden over praktijktheorieën van docenten (jaargang 82, nummer 4, 2005, pp. 284-285) trof ik het volgende citaat aan.
'(...) ten slotte (zo zegt een docent) zou ik graag wat meer diepgang willen zien in de wijze waarop leerlingen omgaan met de leerstof: Ik wil dat ze een beetje nadenken erover en wat meer verbanden proberen te leggen. Net wat meer nadenken dan standaard... Dat ze dan alleen maar het boek pakken, dat zou jammer zijn, want dat is veel te simpel in mijn ogen, het boek. (...) Ik wil ze prikkelen om verder te kijken dan alleen het boek...'
Ik denk dat hier aardig verwoord is, wat menig wiskundeleraar wil bereiken.

Terugblik op zeven afleveringen

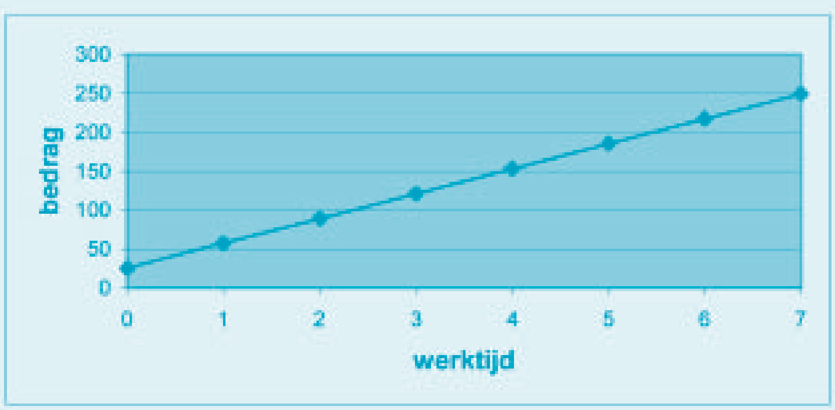
Dit is de achtste en laatste van deze serie columns over wiskundeonderwijs. In mijn voorstel aan de redactie van Euclides had ik aangegeven, in de laatste aflevering een soort terugblik te geven op de vorige zeven columns met een schets van wat ik als ideaal wiskundeonderwijs zie. Nu heb ik in elke aflevering daar in meerdere of mindere mate aandacht aan gegeven.
Samengevat gaat het wat mij betreft om:

- Wiskunde die uitdagend is naar inhoud en naar werkvorm;
- wiskunde die uitgaat van het gezond verstand van de leerlingen;
- wiskunde waarbij het denkwerk aan de mens en het doewerk aan de computer wordt overgelaten;
- wiskunde die iedereen moet weten, bijvoorbeeld procenten en verhoudingen;
- wiskunde die klaargelegd wordt voor de oogst door anderen (andere vakken, studie, beroep);
- wiskunde die door de leerlingen samen met anderen (leraren van andere vakken of beroepsbeoefenaren) ontwikkeld of beoefend wordt;
- wiskunde die zeker niet vergeten mag worden, zoals de culturele aspecten, de eigen wiskundetaal, de abstractie, het creëren van een eigen wereld met eigen uitgangspunten, afspraken en regels;
- wiskunde die toepasbaar is en ook echt toegepast wordt;
- wiskunde die echt begrepen wordt;
- wiskunde die beklijft;
- wiskunde die bestand is tegen verandering van de situatie of de context;
- wiskunde die ...

Modelleren

Terugkijkend op de eerdere columns en nadenkend over hoe het nu verder moet met het wiskundeonderwijs, of liever met het professionaliseren van de wiskundeleraar, wil ik op het volgende aspect nader inzoomen: het proces om van een probleemsituatie te komen tot een oplossing met behulp van wiskunde, hier kortweg aan te duiden als *modelleren*. Volgens mij is modelleren een goed inhoudelijk uitgangspunt om wiskundeonderwijs te ontwikkelen en te beoefenen dat leidt tot wiskunde die ..., zoals hiervoor beschreven is, en die voor alle leerlingen van alle vormen van

uurbedrag	voorrijkosten
32	25
werktijd	**bedrag**
0	25
1	57
2	89
3	121
4	153
5	185
6	217
7	249



Een met Excel gemaakt model van de kosten van een verwarmingsmonteur met een uurbedrag van € 32,00 en

voortgezet onderwijs op hun niveau geschikt is dan wel gemaakt kan worden.
De basis voor modelleren wordt gelegd in het huidige, contextrijke wiskundeonderwijs. In de onderwijspraktijk, zeker in de bovenbouw en het eindexamen, is de afloop hiervan dat de leerlingen het model kant en klaar krijgen voorgelegd. Hun activiteiten blijven dan beperkt tot eraan rekenen, nagaan of het spoort met de gegeven of door aanpassing van een parameter het model beter te laten sporen. Het moeilijkste, maar veel spannender deel, het zelf opstellen van een model, wordt niet gedaan, voorzover het althans niet gaat om lineaire of exponentiële modellen.

Voorstel

Mijn voorstel is concreet om onder regie van onze Vereniging aan een inhoudelijke en vakdidactische vernieuwing te gaan werken die erop gericht is alle wiskundeleraren speciaal op het punt van het modelleren te professionaliseren, en wel door alle (ontegenzeggelijk grote) expertise die in Nederland voorhanden is, te laten samenwerken. Uiteraard moet daar facilitering tegenover staan.
Het uiteindelijke doel zou moeten zijn een professionaliseringsgolf van en vanuit de wiskundeleraren gericht op een inhoudelijke en didactische vernieuwing waarvan ook de beleidsmakers –lees de mensen van de Vernieuwingscommissie wiskunde en de twee profielcommissies en vervolgens ook 'Den Haag' - zeggen: ja, wiskundeonderwijs met een dergelijke focus is een centraal schoolvak. Misschien is het dan mogelijk om in 2010 een leerplan en examenprogramma's te hebben waar we als gemeenschap van wiskundeleraren weer trots op kunnen zijn. Als we er in 2010 in de onderwijspraktijk mee willen beginnen, hebben we overigens niet eens zoveel tijd, want ergens in 2007 zullen de *plannen* klaar moeten zijn.

Over de auteur

Bert Zwaneveld is hoogleraar 'professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het onderwijs in de wiskunde en de informatica' aan de Open Universiteit Nederland.
E-mailadres: Bert.Zwaneveld@ou.nl

Mededeling / Het nieuwe geïntegreerde bètavak in havo en vwo [Jenneke Krüger]

β voorlopige naam: Natuur, Leven en Techniek (NL&T)

Vanaf 2007 kunnen scholen een nieuw geïntegreerd bètavak aanbieden als profielkeuzevak voor leerlingen met profiel NG of NT: 'Natuur, Leven en Techniek'. Doel van het vak is leerlingen op een uitdagende manier kennis te laten maken met nieuwe ontwikkelingen in, maar vooral op de grensvlakken van de exacte vakken, om zo de belangstelling voor studie en beroep in dit gebied te vergroten.
Wiskunde is een van de disciplines die meewerken aan de ontwikkeling van NL&T.

Het vak gaat mogelijkheden geven voor zowel verbreding als verdieping. Het zal voor havo meer beroepsgericht en voor vwo meer onderzoeksgericht georiënteerd zijn. Omvang op havo 320 slu en op vwo 440 slu; het wordt afgesloten met een schoolexamen. Het kan dus ook als vrij examenvak gekozen worden.

NL&T zal modulair opgebouwd worden, o.a. om de gewenste flexibiliteit en aansluiting bij actuele ontwikkelingen mogelijk te maken. Samenwerking met instellingen buiten school wordt een vast onderdeel van het vak.

Bevoegd zijn in principe docenten met een eerstegraads bevoegdheid in biologie, fysische geografie, natuurkunde, scheikunde of wiskunde. Het is echter de bedoeling dat het vak door een team van docenten gegeven wordt.

Op het ogenblik wordt hard gewerkt aan de ontwikkeling van het nieuwe vak, door scholen en docenten, het Platform Bèta Techniek, samen met een projectgroep en onder leiding van de Stuurgroep i.o. De eerstvolgende docentenconferentie voor het nieuwe vak is op **8 maart a.s.** Aanmelding via de website.

Om op de hoogte te blijven van het laatste nieuws kunt u de website van het nieuwe vak raadplegen: *www.hetnieuwebetavak.nl*

Over de auteur

Drs. J.H.J. (Jenneke) Krüger is secretaris van de stuurgroep i.o.
E-mailadres: j.kruger@slo.nl

FOTO 1 Winnaars!

FOTO 2 Jan Donkers (4e van rechts) en Quinten Puite (2e van rechts)

PRIJSUITREIKING NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE 2005

[Gert de Kleuver]

Aantallen en scores

112 leerlingen hebben in september meegedaan aan de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Deze ronde bestond uit 5 opgaven met een maximale score van 10 punten per vraag. De leerlingen moesten in 3 uur deze vijf opgaven oplossen. Er zijn 10 prijswinnaars uitgekomen. Er werden heel hoge scores behaald, namelijk van 33 tot en met 49 punten. Geweldig!

De tien prijswinnaars waren:

Julian Lyczak, Jinbi Jin, Hildo Bijl, Bauke Conijn,
Wouter Berkelmans, Paul Musegaas,
Erik van Holland, Jurjen Hendriks,
Caspar Gevaerts en Wouter Zomervrucht.

Nieuwe voorzitter

Bij de tien prijswinnaars zat ook een leerling van mijn school, namelijk Erik van Holland.
Blijmoedig toog ik 11 november naar Eindhoven om de prijsuitreiking mee te maken.
Melanie Steentjes, secretaris van de Nederlandse Olympiade, heette iedereen hartelijk welkom. Zij maakte bekend dat prof. Jan van de Craats als voorzitter opgevolgd zal worden door prof. F. Beukers. Ik had wel zo'n bericht verwacht, omdat Jan ook al als voorzitter van de organisatie van de Vakantiecursus was afgetreden. Maar ja, wie zou dat werk op zich willen nemen? Gelukkig werd Frits Beukers bereid gevonden.

Eindhoven

Prof. A. Cohen, vice-decaan van de faculteit Wiskunde en Informatica, trad op als gastheer van de TU/e. Hij vond het heel plezierig dat er al ruim 40 jaren een hechte band tussen de olympiade en de TU/e bestaat. Al 44 keer werd de nationale olympiade gespeeld. Deze band werd die middag extra verstevigd door de mededeling dat Jan Donkers, de grote stille kracht achter de olympiades, opgevolgd zal worden door TU/e-medewerker Quintijn Puite, die ook wiskundedocent is in het voortgezet onderwijs. Quintijn is benoemd voor één dag in de week aan de TU/e voor het olympiadewerk. Hij draagt zorg voor trainingen en begeleiding van het team bij de internationale olympiaden.
Verder nam Cohen in zijn toespraak al een voorschotje op de prijsuitreiking door probleempjes aan het publiek voor te leggen. Zo kwam ik nog meer in de stemming.
Jan van de Craats reikte vervolgens de prijzen uit. Iedere winnaar kreeg een boek. Verder werd aan negen prijswinnaars gevraagd welke vervolgstudie gepland staat. Naast diverse technische studies werd ook een paar keer wiskunde genoemd. Aan Wouter Berkelmans werd deze vraag niet gesteld omdat hij nu pas in de derde klas van het vwo zit. Dit had Jan van de Craats ook nog nooit meegemaakt.

Jan Donkers

Er kwamen nog twee sprekers. Allereerst mocht prof. Dirk Siersma namens het KWG aan Jinbi Jin en Johan Konter een prijs overhandigen, omdat zij tijdens de Internationale Olympiade in Mexico allebei een derde prijs hadden behaald.
Als laatste spreker kwam Jan Donkers. Wat een enthousiasme! Op inspirerende wijze vertelde hij over de leerlingen en over de trainingen die gaan komen voor de tien prijswinnaars, maar ook voor de tien mensen die op de plaatsen 11 tot en met 20 eindigden. Na de prijsuitreiking vertrokken zij als groep naar Valkenswaard om het eerste trainingsweekendkamp mee te maken. De leerlingen krijgen daarna ook nog allerlei huiswerkopdrachten. In maart komt er een herhalingskamp en het geheel wordt na een hele trainingsweek afgesloten met een toets. Op dat moment wordt er beslist wie Nederland in de zomer van 2006 mag vertegenwoordigen tijdens de Internationale Wiskunde Olympiade in Slovenië.
De heer Donkers somde ook nog even op hoeveel medailles Nederland had veroverd tijdens alle 45 internationale olympiades: 66 in totaal, waarvan 2 gouden, 19 zilveren en 45 bronzen plakken. Onder de bezielende leiding van Jan waren dit 7 zilveren en 27 bronzen. Als laatste onderdeel van zijn verhaal gaf hij inzicht in de wijze waarop tijdens de internationale olympiade de opgaven opgesteld werden. Een van de sommengenerators is

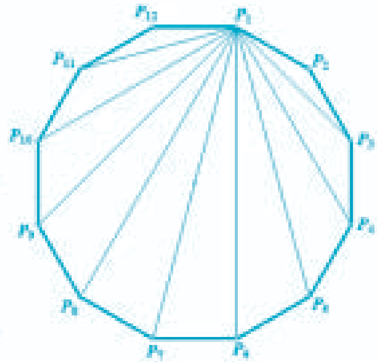
$P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}P_{11}P_{12}$ is een regelmatige 12-hoek.

Te bewijzen:

$$|P_1P_2|^2 + |P_1P_4|^2 + |P_1P_6|^2 + |P_1P_8|^2 + |P_1P_{10}|^2 + |P_1P_{12}|^2 = |P_1P_3|^2 + |P_1P_5|^2 + |P_1P_7|^2 + |P_1P_9|^2 + |P_1P_{11}|^2$$

Dit was de tweede opgave van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, tweede ronde.

De eerste indruk is dat het een lastige som is, maar iets beter kijken levert op dat je de oplossing kan vinden met vijf keer de stelling van Pythagoras en slimme substituties.



prof. N.G. de Bruijn, die ook aanwezig was. De Bruijn kreeg van Jan Donkers een oorkonde omdat hij opgave 2 gemaakt had die tijdens de laatste Internationale gevraagd werd.

Naar Slovenië?

Na deze lovende woorden en ook ten aanzien van de voortgang van de olympiade werden wij allen uitgenodigd voor een drankje en een hapje in een van de ontvangstruimten van de TU/e. Tijd om ontspannen van gedachten te wisselen met andere aanwezigen, waaronder vele oude bekenden. Al met al was de treinreis vanuit Veenendaal naar Eindhoven weliswaar lang, maar zeker de moeite waard.

Nu maar hopen dat de leerling van mijn school naar Slovenië mag.

Nadere informatie over de wiskunde-olympiade is te vinden op
http://olympiads.win.tue.nl/nwo/

Met dank aan Hannie Horvath, Melanie Steentjes en Metha Kamminga.

Over de auteur

Gert de Kleuver is docent aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: g.de.kleuver@gmail.com

§ 3. Ten einde op eene geregelde wijze tot de kennis van de eigenschappen der figuren te geraken, moeten wij de waarheid daarvan bewijzen, in zooverre deze niet van zelve blijkt: terwijl wij ons van de behandelde figuren een duidelijk denkbeeld moeten vormen.

Tot dit laatste doel dienen de *bepalingen*, of duidelijke omschrijvingen van woorden of zaken: zij worden daarom ook verdeeld in *woordelijke* en *zakelijke bepalingen*.

De waarheden die van zelve blijkbaar zijn, en dus niet bewezen kunnen worden, heeten *grondwaarheden* of *axiomata*. Deze zijn *bijzondere* wanneer zij eenige bijzondere, meetkundige waarheid behelzen: *algemeene*, bijaldien zij in het algemeen gelden.

De waarheden, die een bewijs vorderen, worden in *stellingen* voorgedragen. Men onderscheidt daarbij hetgene als bestaande wordt gegeven of aangenomen, *het ondersteldle*; en hetgene gezegd wordt daaruit voort te vloeijen, *het gestelde*. Het verband daartusschen, als tusschen oorzaak en gevolg, moet nu duidelijk worden aangetoond in het *bewijs*; en dit kan op twee wijzen geschieden. Men kan uit het ondersteldle het gestelde zelf afleiden: dan is het bewijs *regtstreeksch*. Men kan ook aantoonen, dat het tegendeel van het gestelde met het ondersteldle in strijd is, of wel, dat men daarbij tot eene klaarblijkelijke ongerijmdheid komt: dan besluit men daaruit, dat het gestelde zelf alleen waar kan zijn; dit noemt men een bewijs *uit het ongerijmde*.

Bij een bewijs mag men slechts van reeds bewezene eigenschappen of van axiomata gebruik maken.

Geeft eene stelling aanleiding tot andere eigenschappen, die daaruit volgen, dan behoeven deze in het algemeen niet afzonderlijk bewezen te worden; men noemt ze *gevolgen*.

Eene stelling, die niet met de voorgaande in eenig naauw verband staat, maar slechts dienen moet bij het bewijs eener volgende stelling, heet *hulpstelling*.

Wanneer men van eene stelling het bewezene als waar aanneemt, en het ondersteldle te bewijzen geeft, komt men tot eene nieuwe stelling, het *omgekeerde* der eerste. Deze is echter niet altijd eene waarheid, en moet dus afzonderlijk worden bewezen.

Uit:

S.F. Lacroix: Beginselen der Meetkunde. Zesde omgewerkte en vermeerderde druk door Dr. D. Bierens de Haan. Te Alkmaar, bij Herm's Coster & Zoon, 1864 (pp. 2-3)

De tweede fase van 2007-2010, een tussenstand

[Swier Garst]

Leerlingen die in 2007 starten in klas 4 van havo en vwo, zullen dat doen in een nieuwe versie van de Tweede fase. De indeling en de omvang van de wiskundeprogramma's veranderen. Op dit moment is een aantal zaken duidelijk terwijl hier en daar nog op een beslissing gewacht wordt.

Van probleem tot oplossing

Het begin van alle veranderingen 2007 ligt bij de beslissing van de minister dat alle vakken in de profieldelen eenzelfde aantal slu's moesten krijgen. Met name voor leerlingen met wiskunde B12 in hun pakket betekent dit een enorme reductie van het aantal uren. Met dat nieuwe aantal uren kan de toekomstige student in een exact vak zich niet voldoende voorbereiden op zijn studie. Gelukkig is voor deze groep leerlingen, op zowel havo als vwo, de mogelijkheid geschapen het vak wiskunde D te kiezen. De minister heeft onlangs de commissie cTWO (Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs) ingesteld. Deze commissie werkt op dit moment hard aan de examenprogramma's wiskunde D voor zowel havo als vwo. Bij het samenstellen van alle programma's (A tot en met D), waarbij rekening gehouden moest worden met nieuwe aantallen studielasturen, is gelet op nog twee aspecten. Het programma moet studeerbaar en onderwijsbaar zijn en de vakinhoud wordt zo gekozen dat niet meer een groot scala aan onderwerpen de revue passeert, maar dat vooral de mogelijkheid tot verdieping geboden wordt. De door de PEP-commissies van de CEVO voorgestelde programma's en het commentaar van de NVvW daarop liggen op dit moment op het ministerie ter beoordeling.

De rol van de school en de examens

Voor de situatie na 2007 geldt dat 60% van de examenstof zal horen tot de stof die op het centraal examen wordt getoetst. Daarmee ligt er een grotere verantwoordelijkheid bij de school. Immers met de 60%-40% regeling ontstaat een situatie waarin de school niet meer op het standpunt kan staan dat bepaalde domeinen niet meer op het CSE worden gevraagd dus dat die ook niet meer behandeld hoeven te worden. Een argument dat nog wel eens gebruikt wordt om een reductie van het aantal contacturen toe te passen. De verantwoordelijkheid van de school voor het eindniveau van de leerling zal na 2007 groter zijn dan nu.

De school kiest

Het is de keuze van de school of zij het vak wiskunde D aan de leerling gaat aanbieden. Vraag is wie de keuze van de school bepaalt. Duidelijk is dat betrokkenheid van docenten bij hun vak de keuze in het algemeen positief beïnvloedt. Wonderlijk is het dat het docenten zijn die moeten opkomen voor het lange termijn belang van de leerling.

Havo

In het profiel C&M hoeft de leerling geen wiskunde meer te kiezen. Leerlingen die kiezen voor een opleiding aan een pabo moeten daar aan het begin van hun studie wel een rekentoets maken.
In het profiel E&M krijgen de leerlingen wiskunde A, waarbij opgemerkt moet worden dat een keuze voor wiskunde B ook kan. Een eventuele toekomstige faculteit Economie zal gelukkig zijn met een keuze voor wiskunde B. Uitgangspunt voor dat vak is het huidige programma wiskunde A12, met dien verstande dat er stevig is gesneden in het domein differentiëren.
In het profiel N&G kunnen de leerlingen kiezen tussen wiskunde A en wiskunde B. Als gevolg daarvan krijgt de docent wiskunde aan een hbo-opleiding met N&G als toelatingseis, een wel erg gemêleerd gezelschap voor zich. Zeker als die opleiding niet tijdig met haar onderwijsprogramma reageert op de nieuwe situatie.
In het profiel N&T moet de leerling wiskunde B volgen. Naast wiskunde B kan de leerling kiezen voor het vak wiskunde D. Zoals al gezegd, de commissie cTWO werkt op dit moment hard aan het examenprogramma wiskunde D, waarvan het cijfer volledig bepaald zal worden door SE-resultaten. Simpel samengevat: voor wiskunde D komt er binnenkort een programma waarvan de examinering volledig onder de verantwoordelijkheid van de school valt.

Vwo

Voor de C&M-leerling is er wiskunde C. Dat vak komt in hoge mate overeen met het vak A1 van nu. Het is de bedoeling dat het vak een duidelijk eigen karakter gaat krijgen, een karakter dat recht doet aan de C van het profiel C&M.
De E&M-leerling zal wiskunde A volgen (maar wiskunde B mag ook). Dat vak, wiskunde A, is te vergelijken met het A12 van nu, maar om de overlap met wiskunde B zo klein mogelijk te maken is bij wiskunde A gekozen voor een zo gering mogelijk aandeel van analyse. De vrees bestaat dat de leerling die economie wil gaan studeren, over te weinig algebraïsche vaardigheden en inzichten zal beschikken om de studie probleemloos te volgen. Die leerling zou het best af zijn met zowel wiskunde A als wiskunde B. Een mogelijkheid die de minister wellicht af zal wijzen.

De N&G-leerling kan kiezen uit wiskunde A en wiskunde B. Zoals opgemerkt bij de havo-leerling met het profiel N&G, zo kan ook hier de vrees worden uitgesproken dat het vervolgonderwijs dat alleen let op de profielkeuze, verwend wordt met een groep studenten waarvan de wiskundige kennis en vaardigheden onderling behoorlijk uiteen zal lopen.
De N&T-leerling volgt wiskunde B, waarbij een leerling die zich goed wil voorbereiden op een bèta-vervolgopleiding ook nog wiskunde D kiest. Ook voor het vwo werkt cTWO hard aan de ontwikkeling van het examenprogramma. Statistiek en kansrekening komen niet voor in wiskunde B. Deze onderdelen zullen bijna zeker tot het vwo-programma wiskunde D gaan behoren.

Wat komt binnenkort?

In januari organiseerde de SLO samen met de NVvW en cTWO veldraadplegingen door het hele land. Van de resultaten horen we wellicht binnenkort meer. In de tweede helft van januari, zo is gepland, heeft de minister met de kamer over de tweede fase gesproken.
Wat het in principe niet kiezen van wiskunde A en B betekent, is inmiddels misschien duidelijk geworden. Hopelijk zijn op dit moment ook de definitieve teksten van de examenprogramma's vastgesteld. Wie de voorstellen van de PEP-commissies wil lezen, kan daarvoor terecht op *www.digischool.nl/wi/community*. Natuurlijk zal de actuele stand van zaken steeds te volgen en soms te bediscussiëren zijn op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl*.

Wat komt na 2007?

De programma's die in 2007 in klas vier van kracht zijn, blijven dat tot 2010. De taak van de al genoemde commissie cTWO is vooral het ontwerpen van wiskundeprogramma's voor havo en vwo voor de periode na 2010. Het visiedocument van cTWO is nu bijna gereed. Ook de profielcommissies blijven aan het werk en houden zich bezig met een verstandige verdeling van de vakken over de profielen.

Tot slot

Op dit moment wordt de besluitvorming rond de onderwijsprogramma's afgerond. Keuzes worden vastgelegd. Dan kunnen de scholen beginnen aan hun keuzeproces. In dat proces kan de wiskundeleraar niet aan de zijlijn staan. In de aanval wordt nu eenmaal makkelijker gescoord dan in de verdediging.

Andere websites

- *www.ctwo.nl*
- *www.deltawis.nl*
- *www.hetnieuwebetavak.nl*

Over de auteur

Swier Garst is bestuurslid van de NVvW.
E-mailadres: garst@planet.nl

Jaarrede van Marian Kollenveld

op de jaarvergadering van 5 november 2005

Dames en Heren,

De tijd vliegt als je het naar de zin hebt. Het lijkt nog maar zo kort geleden dat ik, ook toen in een speciaal voor de gelegenheid aangeschaft jasje, u opriep minder braaf te zijn en meer te vertrouwen op eigen kracht en professionaliteit. Dat was 2004, maar ook 2003, want het is een van de kernthema's van het bestuur.

We maken school. Inmiddels wordt het elk geval met de mond door velen beleden: 'Geef de leraar zijn vak terug', lees en hoor ik steeds vaker, ook van mensen die in de afgelopen jaren verantwoordelijk waren voor het afpakken van het vak.

In mijn slechte momenten doet me dat denken aan mijn grote broer, die eens mijn opwindtrein afpakte, met zijn grote handen de veer stuk draaide en het toen weer teruggaf. Hij kon er niks meer mee, nu mocht ik het wel weer hebben.
Het is dan ook niet verwonderlijk dat deze roep om de leraar komt nu steeds duidelijker wordt dat vernieuwing van bovenaf, zonder steun en inbreng van de leraar, niet gaat.

Maar je kunt ook je zegeningen tellen, accepteren dat het ons lot is, dat we nu eenmaal een natuurlijke voorsprong hebben in het denken, en het zien als stimulans om op de ingeslagen weg door te gaan.
We moeten het zelf doen. Maar daarbij wel gesteund door een beleid dat ons in staat stelt om dat te doen. Dat betekent onder meer een omkering van de financiering, kort gezegd: stel grenzen aan de overhead

voor het management en begin met het geld uit te geven in de klas, voor het primaire proces, investeer daarin. Geef docenten de mogelijkheid voor een carrière binnen het vak. Beloon en bevestig de excellente leraar in het leraar zijn. Sluit leraren niet op in de school, maar geef de mogelijkheid om mee te doen met de discussie over vakinhoudelijke en vakdidactische ontwikkelingen. Geef de leraar de mogelijkheid om zijn vak en zijn beroep bij te houden en daarin te groeien. Haal de deskundigheid de school in; een goede leraar is een jarenlange zegen voor de school, die moet je behouden in die professie en niet wegpromoveren naar een regelfunctie.
Dit laatste, het versterken van de vakinhoudelijke en vakdidactische ontwikkeling van docenten vormt de kern van het professionaliseringsplan van de vereniging, waar we de komende jaren, met u, verder aan willen werken.

Verder werken, want we zijn al een eindje op streek. Dat is fijn, maar het betekent dat we in de toekomst veel mensen nodig hebben, u allemaal eigenlijk. Niet als abstract ideaal, maar heel concreet om méé te werken aan de invulling van de toekomst van ons vak.

De afgelopen jaren stonden vaak in het teken van strijd, verzet tegen in onze ogen slechte plannen en ontwikkelingen. Ik kan niet zeggen dat we winnen of gewonnen hebben, maar onze stem wordt wel in toenemende mate gehoord, danwel onze zorg gedeeld.

Tweede fase havo/vwo

Het meest concreet zichtbaar is dat in de Tweede fase.
We hebben niets kunnen veranderen aan de urenreducties, maar binnen die kaders wel wat aan schadebeperking kunnen doen.
De voorstellen voor een programma-invulling van de vakken *wiskunde A, B en C* in 2007 zoals die nu bij het ministerie liggen, stemmen goeddeels overeen met de voorstellen zoals wij ze hebben gedaan. Veel leden hebben daaraan in diverse stadia van het proces een bijdrage geleverd, waarvoor onze dank. Zie *www.nvvw.nl/voorstellen2007.html* (Bewust globaal gehouden voorstellen…).
Zo is er het nieuwe bètavak, ooit door ons samen met de NVON (Vereniging voor leraren en TOA's in de natuurwetenschappen, waaronder natuurkunde, scheikunde, biologie en ANW) bedacht als compensatie voor de reducties in het NT-profiel, onder de naam *winask*. Dat is inmiddels goed opgepakt, overgenomen door de profielcommissie en de minister en omgedoopt tot *Natuur, Leven en Techniek* (NL&T). De Tweede Kamer is er bijna euforisch over, ook al is er nog niets bekend over de inhoud. Het is belangrijk dat we in dit vak de wiskunde een goede en zinvolle plaats geven. In de stuurgroep voor dit vak zijn de wiskundigen vertegenwoordigd door een leraar, Jos Andriessen, en een hoogleraar, Henk Broer. Maar zij kunnen uw steun goed gebruiken; de echte ontwikkeling van het vak vindt plaats op de scholen.

Dan is er *wiskunde D*. Ooit door ons (voor het vwo) bedacht als voordelig alternatief voor het dubbelkiezen van wiskunde A en B. We noemden het voortgezette wiskunde. Ook dit is opgepakt door de profielcommissies en overgenomen door de minister, voor vwo én havo. Waarmee ze impliciet erkent dat de basisvakken wiskunde A en B onvoldoende zijn. Vandaar ons advies om voor economische studierichtingen met een kwantitatief karakter naast wiskunde A wiskunde B te kiezen, en voor het technisch/exacte domein een combinatie van wiskunde B en wiskunde D.
Het denken over een concrete invulling van het vak, vooral op de havo, is nog in volle gang. We willen een vak dat nuttig en aantrekkelijk is voor de aanstaande bèta's. Uw inbreng is daarbij heel belangrijk, en ook uw school kan concreet meedoen aan de ontwikkeling. Het programma wordt met scholen samen ontwikkeld.

Het initiatief dat ik vorig jaar noemde om de leden van de profielcommissies te ondersteunen is inmiddels uitgegroeid tot een heuse *vernieuwingscommissie* voor de wiskunde, *cTWO* geheten, kortweg c2, gericht op 2010 en verder. Professor Siersma zal u daarover straks meer vertellen. Deze commissie wordt binnenkort door de minister geïnstalleerd. Behalve het feit dat alle leden van de commissie overtuigd lid zijn van de vereniging en dus op zijn minst een verleden hebben als wiskundeleraar, zijn er drie nog praktiserend. Ook deze commissie wenst haar werk te doen in samenwerking met u.

En wat ooit begon als een 20-stappenplan voor het verbeteren van het wiskundeonderwijs van de wieg tot het graf, gemaakt voor een discussie op het ministerie met de Boze Bèta's, is uitgegroeid tot een veelomvattend raamwerk: een *deltaplan voor de wiskunde, DeltaWis*. Ondermeer daarover zal de heer Corstjens, directeur van het Platform Bèta Techniek, straks spreken.

Concluderend: er is weer een perspectief. Er zijn op dit gebied veel initiatieven en de vereniging draait daarin volop mee, er is volop ruimte voor inbreng van docenten. In een aantal werkgroepen wordt daarop verder ingegaan. Maar we moeten de ogen niet sluiten voor het feit dat al deze mooie initiatieven hun oorsprong vinden in het feit dat het nu niet goed gaat, het is domweg hard

nodig. Voor havo/vwo is er nu een begin van een aanpak, zoals ik heb geschetst, maar op andere terreinen zijn onze zorgen onverminderd groot.

Vmbo/onderbouw

Door de presentatie van de nieuwe kerndoelen is elke school bezig met het vorm geven van de invoering, het kiezen van scenario's.
Er zijn uiteraard grote verschillen onderling, maar kernwoorden zijn: samenhang, integratie, het nieuwe leren. De vraag is hoe wiskunde binnen deze ontwikkelingen een plaats gaat krijgen. We hebben daar veel vragen bij: blijft het een apart vak, of wordt het deels of geheel opgenomen in andere vakken? Welke rol spelen methoden? Wie is er in het vmbo uiteindelijk verantwoordelijk voor het vak wiskunde als er vanwege het adagium 'minder handen voor de klas' steeds meer met een oneerbiedig woord 'passanten' de wiskundelessen verzorgen? Hoe is het gesteld met de scholing van deze mensen? Als vereniging van wiskundeleraren kun je per definitie mensen die zich niet primair wiskundeleraar voelen niet bereiken via je normale kanalen. En toch gaat het wiskundeonderwijs aan vmbo-leerlingen ons zeer aan het hart.
Het bestuur heeft daarom een kortlopend onderzoek aangevraagd om zicht te krijgen op wat er momenteel gaande is op deze punten. Wat gebeurt er nu echt in de scholen? Met de resultaten hopen we gerichter te kunnen nadenken over wat ons te doen staat en aanbevelingen te doen naar betrokken partijen en de instanties waar het beleid wordt gemaakt. Uw eigen ervaringen horen we graag.

Hbo

De werkgroep hbo maakt zich eveneens al jaren druk over het verdwijnen van wiskunde als apart vak in het beroepsonderwijs op hoger en middelbaar niveau. Het afgelopen jaar organiseerde de werkgroep een interessante en goedbezochte conferentie over het belang van kritisch leren denken in de wiskunde en de beroepspraktijk. Uiteraard is de werkgroep betrokken bij de ontwikkelingen rond de Tweede fase en de relatie met het vervolgonderwijs.

Andere activiteiten

Aan de *website* van de vereniging is de laatste tijd hard gewerkt. We willen allen die op een of andere manier meegewerkt hebben aan het tot stand komen van een in vele opzichten moderne site, hartelijk danken voor hun bijdrage. We hopen dat u het resultaat binnen korte tijd zult bewonderen.

De leden van de werkgroep van het *Wereldwiskunde Fonds* zijn steeds weer in staat om goede projecten te vinden waar onze vrijwillige bijdrage een mooie bestemming vindt. De werkgroepleden willen we bedanken voor hun inzet tijdens het afgelopen jaar.

De *Zebra* is ons favoriete huisdier. Zijn strepenpatroon kan zonder twijfel wedijveren met de mooie plaatjes uit de discipline van de dynamische systemen. Maar onze Zebra is van een vruchtbaar type. Het doet ons dan ook veel genoegen om te zien dat veel wiskundigen/ auteurs in staat zijn om wiskundige onderwerpen op een voor een breed publiek aantrekkelijke manier te presenteren.

Aan ons huisblad *Euclides* wordt steeds met veel zorg en toewijding gewerkt. Het resultaat mag er dan ook zijn. Het bestuur, maar ik ben ervan overtuigd dat dat ook voor de leden geldt, wil bij deze haar complimenten overbrengen en haar dank aan de redactie uitspreken voor het vele werk dat verzet is en het fraaie resultaat als gevolg.

Slotwoord

U staat allen voor de keuze om mee te doen met de ontwikkelingen of aan de zijlijn te blijven. Wij roepen u van harte op om mee te doen. Zonder u gaat het niet, we hebben u nodig (zie *Ja, ik doe mee!*, elders in het Verenigingsnieuws).
Lid zijn van de NVvW is een activiteit!
Dank u wel.

Ja, ik doe mee! [Wim Kuipers]

Het bestuur heeft tijdens de jaarvergadering een oproep gedaan om mee te doen aan de bemensing van een aantal werkgroepen. Wie er is geweest zal zich dit kunnen herinneren. Toch zijn we er niet in geslaagd om bepaalde commissies voldoende te bemensen.

Er staan voor het komende jaar veel activiteiten op stapel. Het bestuur kan niet participeren in al die werkvelden.
Vandaar dat we door middel van de in dit nummer bijgevoegde flyer nogmaals een beroep op u willen doen.

Hebt u ambitie in een van de genoemde mogelijkheden, dan kunt u de flyer ingevuld aan de secretaris opsturen.
Het zou kunnen zijn dat u eerst nog wat informatie zou willen hebben. Graag horen we dan uw reactie en kunnen we u van dienst zijn.

Fotoverslag studiedag/ jaarvergadering 2005

Op zaterdag 5 november 2005 werd de jaarlijkse NVvW-jaarvergadering gehouden in het Anna van Rijn College te Nieuwegein. Dit keer was het thema: ‘Wiskunde, een vak apart?!’
De opkomst was groter dan vorig jaar! Tijdens de plenaire bijeenkomst was er nauwelijks plaats voor iedereen in de zaal en moesten er mensen op het muurtje aan de zijkant zitten.

Foto 1 - Van voor naar achter: de heer Van Lint, mevrouw Pitgens-Debets en de heer Wanningen.
Foto 2 - Achteraan, vlak voor de boekenstand van Wolters-Noordhoff, was nog plaats voor Roel en Lia van Asselt.
Foto 3 - De jaarrede van de voorzitter werd uitgesproken door Swier Garst, penningmeester en waarnemend voorzitter van de NVvW. Voorzitter Marian Kollenveld kon helaas zelf niet aanwezig zijn wegens ziekte. De spontane actie met flap-overs waarop ieder zijn beterschapsgroeten aan Marian kon schrijven heeft zeker bijgedragen aan haar herstel.
Foto 4 - Hans Corstjens (op de foto links), directeur van het Platform Bèta Techniek, hield een inleiding over de inspanningen van de wiskundewereld om het wiskundeonderwijs een vernieuwingsimpuls te geven. Onder de naam DeltaWis presenteerde professor Dirk Siersma (rechts) uit naam van de diverse wiskundeorganisaties het plan van aanpak aan het Platform Bèta Techniek.
Foto 5 - Marianne Lambriex, organisator van de studiedag, nam de huishoudelijke mededelingen voor haar rekening. Alle lof weer voor haar organisatie- en improvisatietalent.
Foto 6 - Het thema van de plenaire lezing *Wiskunde, een vak apart*?! werd op een bijzondere manier vormgegeven door Kees Hooyman die de zaal goed wist te bespelen.
De zaal ontpopte zich als een grote schoolklas die enorm zijn best deed om de antwoorden op de vragen over de proef met het bierkratje te formuleren.
Foto 7 - Er werden filmpjes getoond over situaties in de klas waar met vraag- en antwoordspel het begrip vector werd geïntroduceerd.
Foto 8 - Na de lezing werd Kees Hooyman (links) bedankt door Henk Rozenhart (rechts) van het hoofdbestuur.
Foto 9 en 10 - Als laatste punt van het plenaire deel introduceerde Gerben Wiersma de nieuwe website van de NVvW. Achter de schermen is alles op de site verbouwd en geautomatiseerd door Gerbens bedrijf Othila, en ten tijde van de studiedag draaide de nieuwe site al voor een deel parallel aan de oude.

Nog vóór de middagpauze werd een eerste drukbezochte workshopronde gehouden.
Foto 11 - Johan Gademan presenteerde de eerste resultaten van zijn interactieve innovatieve wiskundemethode voor bovenbouw havo-vwo.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Foto 12 - In de actieve workshop van Anne van Streun gaat het over het pendelen tussen abstracte en concrete wiskunde.
Foto 13 - Op energieke wijze geeft Kees Hoogland inzicht in het rekenen van alledag en het zich bewust worden van het belang van getallen. Een workshop specifiek voor onderwijsgevenden in het vmbo.

In de middagpauze en tussen de bedrijven door was er weer volop gelegenheid om wiskundige spelletjes aan te schaffen om als cadeautje mee naar huis te nemen.
Foto 14 - Jongelui van de stichting Vierkant demonstreren onvermoeibaar de truc met de ketting en de ring die naar beneden valt en zichzelf opknoopt.
Foto 15 - In de ruimbemeten pauzes ontmoeten oude bekenden elkaar, zoals Agneta Aukema en Heleen Verhage, beiden oud-bestuurslid van de NVvW.
Foto 16 - Professor Jan van de Craats en hoofdredacteur Marja Bos van Euclides hebben ook het een en ander te bespreken.
Foto 17 - Adri Knop stelt zich op de hoogte van de laatste ontwikkelingen op het gebied van lesmateriaal op de jaarmarkt, die over twee verdiepingen verspreid was.
Foto 18 - Pauline Vos (midden) interesseert zich voor ruimtemeetkunde en puzzels.
Foto 19 en 20 - Lunch en jaarmarkt.
Foto 21 - Pieter Schadron in actie met zijn TI-rekenmachines.
Foto 22. Ook de Casio-rekenmachines stonden ruim in de belangstelling.
Foto 23. Bij de NVvW-stand waren weer vier nieuwe uitgaven van de Zebra-serie verkrijgbaar. We zijn al gevorderd tot nummer 21! Heeft u ze allemaal compleet? Op de voorgrond links Rindert Reijenga uit Bolsward en rechts Elly van Bemmel van de ledenadministratie.
Foto 24. In de workshop van Tom Merkx ging het over de geschiedenis van wiskunde met Math4all. Veel ICT-geïnteresseerde docenten kwamen op zijn workshop af voor ideeën over lesmateriaal.
Foto 25. Wim Kleijne, lid van beide Profielcommissies, gaat in op de toekomstige wiskunde in de bovenbouw na 2007. Onder zijn gehoor bevindt zich o.a. Jan Keemink (links).
Foto 26. In de workshop van Ton Lecluse ligt er weer een uitdaging voor docenten van het vmbo. Vooraf geprepareerde uitslagen en bouwplaten zijn een inspiratiebron voor gebruik op school.
Foto 27. Goochelaar Dick Koornwinder deed de afsluitende act, waarbij de zaal op wiskundige wijze op het verkeerde been werd gezet. De meest spectaculaire truc was die met de versnipperde krant. De geheel verscheurde krant werd getransformeerd tot een onbeschadigde krant met als kop: 'Minister adviseert twee wiskundes in je profiel!'
Met deze uitsmijter was het weer een geslaagde studiedag te noemen, waarna iedereen volop geïnspireerd het leven van alledag kon oppakken.

15

19

23

16

24

17

20

25

21

26

18

22

27

Tekst en foto's: Metha Kamminga; zij is onder meer bestuurslid van de NVvW.
E-mailadres: m.kamminga@nvvw.nl

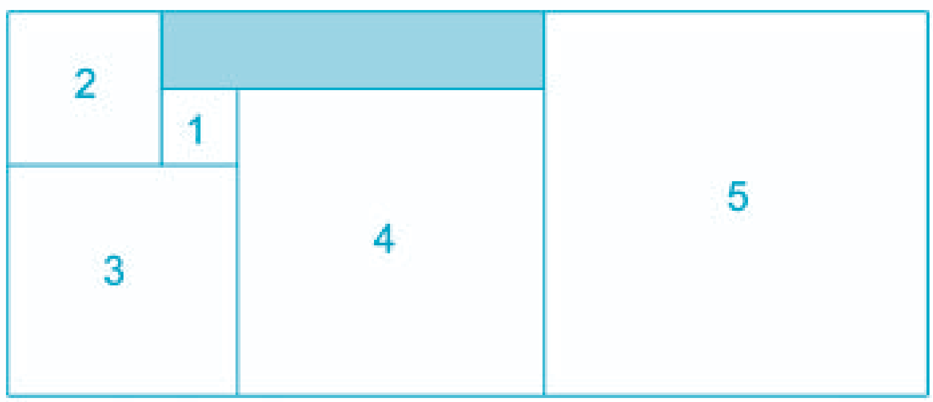
[Frits Göbel]

Puzzel 814
Een inpakprobleem met vierkanten

Wist u dat $1^2 + 2^2 + \ldots + 24^2 = 70^2$? (*)
In de 19e eeuw bewees Eduard Lucas, ook bekend onder zijn pseudoniem Professor Claus (een anagram van Lucas), dat deze identiteit uniek is in de volgende zin.
Laat $Q(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Dan zijn $(n, m) = (24, 70)$ en $(1, 1)$ de enige oplossingen van $Q(n) = m^2$.

Als voorbeeld ziet u in figuur 1 dat vijf vierkanten met zijden 1, 2, 3, 4, 5 in een rechthoek van 5 bij 12 passen. De lege ruimte heeft een oppervlakte van vijf eenheidsvierkantjes en dat is niet te verbeteren.

Opgave
Laat $R(n)$ een rechthoek zijn met minimale oppervlakte waarin de vierkanten met zijden 1, 2, …, n passen. Bepaal (of benader) $R(n)$ voor $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11$.



FIGUUR 1

Er zijn verder wel bijna-oplossingen, zoals $Q(48k^2)=(192k^3 + 3k)^2 - k^2$
Voor $k = 3$ bijvoorbeeld is $Q(432) = 26967240$ en het grote kwadraat rechts is 26967249.
Het is wel grappig dat voor $k=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ de identiteit (*) uit regel 1 weer verschijnt!

Naar aanleiding van die identiteit heeft men zich afgevraagd of het ook mogelijk is een vierkant van 70 bij 70 te betegelen met de vierkanten met zijden 1 tot en met 24. Helaas, dit gaat niet. Maar ook hier kun je zoeken naar bijna-oplossingen, bijvoorbeeld een zo klein mogelijke rechthoek waar de vierkanten in passen. Omdat 24 in dit verband misschien wat al te groot is, nemen we kleinere getallen. En we eisen dus niet dat de ‘doos’ vierkant is.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 18 februari 2006.

Veel plezier!

Oplossing
'Kwadraten komen terug!'

Er waren negen oplossers: Hans Klein (nieuw), Wobien Doyer, Ton Kool, Arie Verheul, F. Lipperts (nieuw), Wim van den Camp, Lieke de Rooij, Herm Jan Brascamp en Leo van den Raadt. Alle oplossingen zijn correct, dus iedereen krijgt 20 punten.
Twee inzenders merkten op dat er tientallig nóg een kwadraat met twee verschillende cijfers is: 816192 = 6661661161. Ook deze staat dus niet in het lijstje van Guy.

De opgaven konden moeilijk worden opgelost zonder een computer of althans een programmeerbaar rekenapparaatje te gebruiken. Maar dan komen de oplossingen er vrij snel uit rollen. De mens (u dus) moet dan nog wel een regelmaat herkennen. En eigenlijk ook nog bewijzen dat de regelmaat zich tot in het oneindige voortzet! Dit laatste is door drie oplossers gedaan: Wobien Doyer, Arie Verheul en Herm Jan Brascamp. Deze bewijzen zijn eenvoudig, met name voor gevallen als [3]4. Maar als je ziet dat de kwadraten van 34, 334 en 3334 achtereenvolgens gelijk zijn aan 1156, 111556 en 11115556, is er heel weinig ruimte voor twijfel. Het leek me juist om geen bewijzen te verlangen van de inzenders.

Voor *opgave 1* had ik zelf 10 oplossingen gevonden, evenals Ton Kool, en vier oplossers (Hans Klein, Wobien Doyer, Lieke de Rooij en Herm Jan Brascamp) hadden er 11: 3[3]8, 3[5], 12[3]5, [3]59, [3]4, [6]5, 23[3]5, [6]515, [6]8, 1[6]5 en [6]7.
Enkele dagen na haar eerste mail stuurde Wobien Doyer een ongelooflijke twaalfde oplossing: [3]333504485. Het kwadraat van het eerste getal uit deze rij is 11112252151515115225. Doyer kwam deze rij op het spoor dankzij het feit dat zij, kort gezegd, bovengenoemde bewijzen had samengevoegd tot één bewijs en zodoende eigenschappen van de mogelijke oplossingen had afgeleid waarmee het zoekwerk aanzienlijk kon worden versneld.
Lieke de Rooij stuurde onder andere een lijst van meer dan 400 getallen met hun kwadraten van 3 cijfers, gevolgd door een raadselachtig lijstje waarin dingen als 132 = 171 voorkomen. Na enig puzzelen begreep ik dat de computer op achttallig was overgegaan.

Ook bij *opgave 2* liep het aantal ingezonden rijen sterk uiteen: van 2 tot meer dan 40. De eenvoudigste oplossing is 10[0]2[0]1, waarbij de twee rijtjes nullen even lang zijn. De kwadraten van deze getallen zijn (toevallig) palindromen. Wim van den Camp schreef: 'Ik reken inmiddels vrijwel geautomatiseerd drietallig...' Dat zal nu hopelijk 'genezen' zijn.

Het grondtal 5 is door een viertal inzenders bekeken, maar geen van hen heeft een oneindige rij gevonden.

Ladderstand

De top van de ladder is:
L. van den Raadt 324
W. Doyer 302
J. Meerhof 244
T. Kool 231
W. van den Camp 226
H.J. Brascamp 180

De complete ladderstand is te bekijken op de website van Euclides: *www.nvvw.nl/euclladder.html*.

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*).
Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*-versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*).

5	2 maart 2006	17 januari 2006
6	13 april 2006	28 februari 2006
7	26 mei 2006	4 april 20006
8	22 juni 2006	9 mei 2006

vr. 3 en za. 4 februari
Nationale Wiskunde Dagen, Noordwijkerhout
Organisatie Freudenthal Instituut

woensdag 8 maart
Docentenconferentie NL&T
Organisatie Platform Bèta Techniek

woensdag 8 maart, op de basisscholen
De Grote Rekendag
Organisatie Freudenthal Instituut

dinsdag 14 maart
π-dag; de 300ste verjaardag van π

do. 16 en vr. 17 maart, Noordwijkerhout
Nationale Rekendagen
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 17 maart, op de scholen
Kangoeroe wedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

ma. 27 en di. 28 maart, Delft
Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG en TU Delft

donderdag 20 april
Conferentie Wiskunde en ICT
Organisatie APS en FI

zaterdag 20 mei, Utrecht
12e HKRWO symposium: Boeken die hun sporen hebben nagelaten
Organisatie Historische Kring Reken- en WiskundeOnderwijs

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

** Zebra-boekjes*

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische Meetkunde
22. Spelen en Delen

Zie ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Aankondiging

conferentie 'Wiskunde en ict 2006'

Op donderdag 20 april 2006 vindt voor de vijfde keer de conferentie 'Wiskunde en ict' plaats.
Deze dag wordt gezamenlijk georganiseerd door het APS en het Freudenthal Instituut en vindt in Utrecht plaats. Dit jaar richten we ons op havo- en vwo-docenten (onderbouw en bovenbouw).

De doelstelling van de conferentie is een update te geven van de ontwikkelingen op ict-gebied voor het wiskundeonderwijs. Deelnemers aan de conferentie krijgen een beeld van de stand van zaken, kunnen ervaringen uitwisselen, kennismaken met (nieuwe) ict, bijpraten en zelf ervaring opdoen.
Na een plenaire presentatie over de rol van ict in het technisch vervolgonderwijs volgen drie rondes met werkgroepen. De werkgroepen zijn ingedeeld in drie categorieën:

- *Direct in en uit de klas.*
- *Leeromgevingen en minicursussen.*
- *Nieuwe ontwikkelingen.*

Gedurende de dag zijn leerlingen actief in een ict-atelier en zij zullen hun resultaten aan het eind van de dag kort presenteren.

Meer informatie volgt dit vroege voorjaar in een mailing aan alle scholen.

Zet de datum vast in uw agenda en blijf ontwikkelingen volgen op de website www.fi.uu.nl/ict/2006

NIEUW

Prijs voor leden van de NVvW: € 8,00 (incl. verzendkosten);
bestellingen via girorekening 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven, Utrecht.
Prijs voor leden van de NVvW op bijeenkomsten: € 7,00.
Prijs voor niet-leden: € 9,00 (in de betere boekhandel).

Zie ook: www.epsilon-uitgaven.nl

[Iris van Gulik-Gulikers] **Zebra 21**

Geschiedenis van de niet-Euclidische Meetkunde

In deze Zebra maak je kennis met een ander soort meetkunde dan je bent gewend. Bijvoorbeeld, volgens de niet-Euclidische meetkunde vormen de drie hoeken van een driehoek samen geen 180°.
Aan deze bijzondere meetkunde is een hele geschiedenis vooraf gegaan. Dit boekje begint ruim 2000 jaar geleden bij de Elementen van Euclides en laat zien hoe er door de eeuwen heen discussie over meetkunde was. Een van deze opvattingen speelt een rol in afbeeldingen van Escher.
De opgaven en opdrachten maken het mogelijk om zelf aan de slag te gaan met verschillende soorten meetkunde.

ISBN 90 5041 091 X

Epsilon uitgaven
in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Moderne
wiskunde